



Comportement couplé des géo-matériaux : deux approches de modélisation numérique

Ferdinando Marinelli

► To cite this version:

Ferdinando Marinelli. Comportement couplé des géo-matériaux : deux approches de modélisation numérique. Autre [cs.OH]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENI005 . tel-00954405

HAL Id: tel-00954405

<https://theses.hal.science/tel-00954405>

Submitted on 2 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité: **Ingénierie-Matériaux Mécanique Énergétique Environnement
Procédés Production (510)**

Arrêté ministériel: 7 août 2006

Présentée par

MARINELLI Ferdinando

Thèse dirigée par **CHAMBON** René et
codirigée par **SIEFFERT** Yannick

préparée au sein du **Laboratoire 3S-R**
dans l'**École Doctorale IMEP2**

Comportement couplé des géo- matériaux: deux approches de modélisation numérique

Thèse soutenue publiquement le **21.01.2013**,
devant le jury composé de:

Claudio Tamagnini

Professeur - Università degli studi di Perugia

Robert Charlier

Professeur - Université de Liège

Antonio Gens

Professeur - Universitat Politècnica de Catalunya

Cino Viggiani

Professeur - Université Joseph Fourier



Remerciements

Je voudrais exprimer dans cette page traditionnelle le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du laboratoire sols, solides, structures et risques de Grenoble.

Je tiens tout d'abord à remercier le jury de cette thèse pour avoir participé à ma soutenance, notamment Claudio Tamagnini de l'université de Pérouse et Robert Charlier de l'université de Liège pour avoir accepté d'être mes rapporteurs. Je voudrais remercier René Chambon et Yannick Sieffert pour avoir encadré cette thèse. En particulier je tiens à remercier René Chambon pour le travail qu'il a consacré à cette thèse, pour sa disponibilité, sa patience et pour l'enthousiasme dont il a fait preuve à mon égard. Je tiens également à remercier Denis Caillerie et Pierre Besuelle pour m'avoir souvent accueillis agréablement dans leurs bureaux pour répondre à mes questions, Frédéric Collin de l'université de Liège, pour l'aide qu'il m'a consacré quant à l'utilisation de Lagamine. Je remercie également les informaticiens du laboratoire, Remi et Jérôme pour leur aide.

Mes remerciement s'adressent maintenant, à Giulia Viggiani et Cino Viggiani. Giulia pour m'avoir donné la possibilité de passer une année d'Erasmus à Grenoble après laquelle j'ai pu démarrer la thèse au laboratoire 3S-R. Cino pour avoir participé en tant que président de jury à ma soutenance, pour les échanges scientifiques et non-scientifiques et ainsi pour l'amitié sincère qu'il me témoigne.

Je tiens à remercier ma famille, mon père, ma mère et ma sœur Donatella, pour leur présence constante malgré la distance. Un remerciement spécial va à ma copine Anggi qui m'a accompagné pendant tout ce parcours d'étude et qui m'a constamment encouragé.

Enfin je tiens à remercier tous les amis grenoblois avec lesquelles j'ai partagé des bons moments. Merci à Marcos, Hana, Piero, Erika, Edward, Fabrizio, Jeremy, Alessandro, Patrizia, Suryavut, Hola, Anca, Lam, Laura, Celine, Eva, Christina, Stefano, Fabio, Carole et enfin, dulcis in fundo, Francesca et Emanuele pour tout ce qu'ils ont fait pour moi à mon arrivée à Grenoble, les amis de Rome (Eliana et Riccardo) qui sont venus me voir le jour de ma soutenance, Matias, Khadi et Heloise avec lesquels j'ai partagé le bureau pour la majeure partie de la thèse et avec lesquels les échanges scientifiques, l'aide réciproque et les blagues ont toujours été au rendez-vous.

Merci à tous pour cette merveilleuse experience à Grenoble.

Résumé

Nous présentons deux approches différentes pour décrire le couplage hydromécanique des géomatériaux. Dans une approche de type phénoménologique nous traitons le milieu poreux comme un milieu continu équivalent dont les interactions entre la phase fluide et le squelette solide constituent le couplage du mélange à l'échelle macroscopique. En caractérisant le comportement de chaque phase nous arrivons à décrire le comportement couplé du milieu couplé saturé.

Nous utilisons cette approche pour modéliser des essais expérimentaux faits sur un cylindre creux pour une roche argileuse (argile de Boom). Les résultats expérimentaux montrent de façon claire que le comportement de cette roche est fortement anisotrope. Nous avons choisi de modéliser ces essais en utilisant une lois de comportement élasto-plastique pour laquelle la partie élastique est transversalement isotrope.

Le problème aux conditions aux limites étudié met en évidence des déformations localisées autour du forage intérieur. Afin de décrire de façon objective le développement de ces bandes de cisaillement nous avons considéré un milieu continu local de type second gradient qui permet d'introduire une longueur interne. De ce fait nous avons pu étudier le problème d'unicité en montrant qu'un changement de la discrétisation temporelle du problème aux limites peut conduire à des solutions différentes.

Dans la deuxième approche étudiée nous caractérisons la microstructure du matériau avec des grains et un réseau de canaux pour la phase fluide. À l'aide d'un processus numérique d'homogénéisation nous arrivons à calculer numériquement la contrainte du mélange et le flux massique. Cette méthode d'homogénéisation numérique a été implémentée dans un code aux éléments finis afin d'obtenir des résultats macro. Une validation de l'implémentation est proposée pour des calculs en mécanique pure et en hydromécanique.

Mots-clés

Lois de comportement, Couplage hydro-mécanique, Élasto-plasticité, Homogénéisation numérique, Bandes de cisaillement, Modèles locaux de second gradient, Non-unicité, Grandes déformations, Éléments finis.

Abstract

We present two different approaches to describe the hydromechanical behaviour of geomaterials. In the first approach the porous media is studied through an equivalent continuum media where the interaction between the fluid and solid phases characterize the coupling behaviour at the macroscale.

We take into account this approach to model experimental tests performed over a hollow cylinder sample of clay rock (Boom Clay), considered for nuclear waste storage. The experimental results clearly show that the mechanical behaviour of the material is strongly anisotropic. For this reason we chose an elasto-plastic model based on Drucker-Prager criterion where the elastic part is characterized by cross anisotropy.

The numerical results of boundary value problem clearly show localised strains around the inner hollow section. In order to regularize the numerical problem we consider a second gradient local continuum media with an enriched kinematic where an internal length can be introduced making the results mesh independent. The uniqueness study is carried out showing that changing the temporal discretization of the problem leads to different solutions.

In the second approach we study the hydromechanical behaviour of a porous media that it is characterised by the microstructure of the material. The microstructure taken into account is composed by elastic grains, cohesive interfaces and a network of fluid channels. Using a periodic media a numerical homogenization (square finite element method) is considered to compute mass flux, stress and density of the mixture. In this way a pure numerical constitutive law is built from the microstructure of the media. This method has been implemented into a finite element code (Lagamine, Université de Liège) to obtain results at the macroscale. A validation of this implementation is performed for a pure mechanical boundary value problem and for a hydromechanical one.

Keywords

Constitutive equations, Hydro-mechanical coupling, Elasto-plasticity, Numerical homogenisation, Strains localisation, Local second gradient models, Non-uniqueness, Large strains, Finite elements.

Table des matières

Table des figures	14
Liste des tableaux	22
I Introduction Générale	24
1 Introduction	26
1.1 La localisation de la déformation	26
1.2 Structure de la thèse	30
II Comportement couplé des géomatériaux : deux approches de modélisation numérique	34
2 Modélisation de la localisation à l'aide des modèles couplés de second gradient	36
2.1 L'introduction d'une longueur interne	36
2.1.1 Les modèles non-locaux	38
2.2 Les milieux continus avec microstructure	41
2.2.1 La théorie de Germain : cas général	41
2.2.2 Les milieux continus de Cosserat	43
2.2.3 Les milieux continus de second gradient	44
2.3 Deux approches pour le comportement couplé	50
2.3.1 Échelles d'observations	50
2.3.2 Approche classique ou phénoménologique	51
2.3.3 Approche multi-échelle	54
2.4 Solution numérique du problème continu	56
2.4.1 Algorithme de Newton-Raphson	57
2.4.2 Linéarisation de la formulation faible	58
2.4.3 Linéarisation des lois de comportement	64
2.4.4 Discrétisation en éléments finis	69
2.5 Problème de perte d'unicité de la solution	81
2.5.1 Le problème numérique	81

III Théorie de l'élasto-plasticité : une loi de comportement anisotrope	86
3 L'anisotropie dans les géomatériaux	88
3.1 L'anisotropie dans les géomatériaux	88
3.1.1 Notions d'anisotropie dans les géomatériaux	88
3.1.2 Modélisation de l'anisotropie : loi de comportement	89
3.2 Les roches argileuses	91
3.3 L'argile de Boom	91
3.4 Résultats expérimentaux sur un cylindre creux	97
3.4.1 Le Projet Timodaz	97
4 Une loi de comportement Anisotrope	102
4.1 Introduction	102
4.2 Quelques rappels sur l'élasto-plasticité en petites déformations	103
4.2.1 Notions de base	103
4.2.2 Conditions de Kuhn-Tucker et de cohérence	104
4.2.3 Tenseur tangent élasto-plastique	105
4.2.4 Remarque sur l'hypo-élastoplasticité	106
4.3 Modèle à frottement interne : Plasol	108
4.3.1 Loi constitutive Plasol	108
4.3.2 État de contrainte au sommet	112
4.3.3 Essais biaxiaux en régime homogène : loi constitutive Plasol	113
4.4 Intégration numérique de la loi constitutive	116
4.4.1 Caractères généraux	116
4.4.2 Algorithme d'intégration	116
4.4.3 Développement analytique pour l'intégration	120
4.4.4 Implémentation de l'intégration dans Lagamine	124
4.5 Modèle élasto-plastique anisotrope	126
4.5.1 Symétries matérielles	126
4.5.2 Élasticité transversalement isotrope	127
4.6 Implémentation et validation	131
4.6.1 Implémentation : modifications de la loi Plasol	131
4.6.2 Validation numérique	132
5 Simulation d'excavation : étude numérique sur un cylindre creux	138
5.1 Introduction	138
5.2 Données du problème numérique	141
5.2.1 Maillage	141
5.2.2 Paramètres matériels	144
5.2.3 Numérotation des degrés de liberté	145
5.2.4 Algorithme de discrétisation temporelle	146
5.3 Étude de non-unicité : loi de comportement Plasol	148

5.3.1	Déchargement du forage : phase A	151
5.3.2	Stabilisation : phase B	153
5.3.3	Convergence numérique du problème	156
5.4	Étude de non-unicité : loi de comportement Plasol anisotrope	168
5.4.1	Déchargement du forage : phase A	170
5.4.2	Stabilisation : phase B	172
5.4.3	Convergence numérique du problème	174
5.5	Comportement hydraulique	181
5.6	Changement de la discrétisation temporelle du problème	183
5.7	Calcul avec une machine à 32 bit	187
5.7.1	Loi de comportement Plasol	187
5.7.2	Loi de comportement Plasol anisotrope	188
5.8	Calcul sur un quart de cylindre creux	192
5.8.1	Loi de comportement Plasol	192
5.8.2	Loi de comportement Plasol anisotrope	193
5.9	Comparaison avec les résultats expérimentaux	197
5.10	Conclusion	199

IV Homogénéisation numérique :

Les éléments finis au carré FEM² 204

6 La méthode de l'homogénéisation 206

6.1	Introduction	206
6.1.1	Techniques d'homogénéisation	207
6.2	Homogénéisation pour les milieux à structure périodique	208
6.2.1	La méthode des développements asymptotiques	208
6.2.2	Les méthodes numériques	209

7 La méthode des éléments finis au carré FEM² 216

7.1	Introduction	216
7.2	Échelle microscopique : définition du problème	218
7.2.1	Remarque sur les degrés de liberté fixés	219
7.3	Échelle microscopique : Conditions aux limites	221
7.3.1	Conditions aux limites homogènes	221
7.3.2	Conditions aux limites périodiques	222
7.4	Échelle microscopique : Lois de comportement	224
7.4.1	Squelette solide	224
7.4.2	Interfaces cohésives	226
7.5	Échelle microscopique : Solution numérique	230
7.5.1	Application de la méthode de Newton-Raphson	230
7.5.2	Discrétisation spatiale du problème continu	233
7.6	Échelle microscopique : Solution numérique du problème fluide	236

7.6.1	Équations du problème fluide	236
7.6.2	Caractérisation des interfaces fluides	239
7.6.3	Description numérique du problème couplé	244
7.7	Grandeurs macroscopiques homogénéisées	252
7.7.1	Implémentation des éléments finis à l'échelle micro	253
8	Résultats numériques	256
8.1	Introduction	256
8.2	Validation du problème en mécanique pure	259
8.2.1	Traction isotrope	260
8.2.2	Compression isotrope	272
8.2.3	Cisaillement pur	278
8.3	Validation du problème couplé	282
8.4	Conclusions	290
V	Conclusions Générales	292
9	Conclusions Générales	294
9.0.1	Une loi de comportement anisotrope.	294
9.0.2	La méthode de l'homogénéisation numérique.	296
VI	Annexe	300
A	Developement analytique sur l'anisotropie transversale	302
A.1	Paramètres mécaniques	302
A.2	Changement de repère pour un loi transversalement isotrope	302
B	Calculs numériques sur un cylindre creux	306
B.1	Solution du problème aux conditions au limits	306
B.1.1	Loi constitutive Plasol	306
B.1.2	Profile de la pression d'eau	315
B.1.3	Convergence des différents calculs	316
B.1.4	Loi constitutive Plasol anisotrope	319
B.1.5	Profile de la pression d'eau	327
B.1.6	Convergence des différents calculs	328
C	Homogénéisation numérique : Les Élément finis au carré FEM²	331
C.1	Lois de comportement des interfaces cohésives	331
C.2	Homogénéisation de la partie mécanique	332
	Bibliographie	334

Table des figures

1.1	Classification cinématique de la localisation des déformations pour les grès, Fossen [67].	27
1.2	Phénomènes de localisation des déformations dans les géomatériaux : a) Tremblement de terre en Turquie [148], b) Essai de compression triaxiale dans un échantillon de sable, [44].	28
1.3	Essais à rayon X réalisés par Roscoe [124].	29
2.1	Échelles d'observation pour un milieu continu Ω	51
2.2	Dimension caractéristique H du volume infinitésimal $d\Omega$ de la roche argileuse Boom Clay (l'image de la mésostructure est obtenue avec la technique BIB [133], [134])	52
2.3	Milieu poreux saturé Ω	53
2.4	Algorithme de Newton-Raphson pour une fonction à une variable $y=f(x)$	57
2.5	Matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau^1}]_{(25 \times 25)}$ du problème continu linéarisé, [45].	62
2.6	Bloc bleu ciel de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau^1}]_{ij}$	66
2.7	Bloc bleu ciel de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau^1}]_{ij}$	67
2.8	Éléments finis pour un milieu second gradient.	70
2.9	Algorithme de Newton-Raphson pour une fonction à une variable $y = f(x)$	81
2.10	Bassin d'attraction pour la fonction $x^5 - 1 = 0$ dans le plan complexe : fractale de Newton-Raphson	82
3.1	Incrément de la température en fonction du temps (First training course, TIMODAZ project 2007)	92
3.2	Site de Mol : massif rocheux de Boom Clay	93
3.3	Propriété physique et hydromécanique de l'argile de Boom à l'état naturel ($z=223m$)	94
3.4	Résultat obtenus par Piriyaikul K. [117]	95
3.5	Essais de compression triaxiale drainés sur l'argile de Boom : $v_{déplac} = 0.001$ mm/min, $H_o=7.6cm$ (Baldi et al. [10]).	96
3.6	Essais de compression triaxiale drainés sur l'argile de Boom : a) Échantillon prélevé à 240m (Baldi [10]), b) Échantillon prélevé à 247m (Horseman [83]).	96

3.7	Détails de l'appareil expérimentale utilisé pour les expériences sur un cylindre creux (Université de Lausanne (EPFL))	98
3.8	Chargement du cylindre creux : essais du laboratoire LMR (EPFL) . . .	99
4.1	Comparaison entre la surface de plasticité de Drucker-Prager et Mohr Coulomb : plan déviatorique, [32].	108
4.2	Surface du critère de plasticité Drucker-Prager	110
4.3	Règle d'écrouissage pour l'angle de frottement : cas adoucissant et durcissant	111
4.4	Evolution de ϕ_C en fonction de ϕ_E pour Drucker-Prager [53].	113
4.5	Étude paramétrique sur la cohésion finale c_{fin}	115
4.6	Étude paramétrique sur l'angle de frottement final $\phi_{C_{fin}}$	115
4.7	Algorithme d'intégration d'une loi de comportement élasto-plastique (flux d'écoulement associé).	117
4.8	Exemple de plasticité associée parfaite : a) Différents choix de la normale n. b) Schéma explicite, cas d'instabilité.	118
4.9	État de contrainte au sommet, Barnichon [13].	123
4.10	Organigramme de l'implémentation de <i>Plasol</i> dans Lagamine	125
4.11	Milieu élastique transversalement isotrope, π plan d'anisotropie.	130
4.12	Compression biaxiale, π plan d'anisotropie transverse	132
4.13	Essai biaxial : erreur relative	134
4.14	Cinématique imposée : erreur relative	135
4.15	Cinématique imposée : erreur relative	136
5.1	Zoom de la section vertical d'un échantillon du cylindre creux dans l'appareil expérimentale.	139
5.2	Conditions aux limites : déchargement du forage (phase A), stabilisation (phase B). Essai 13 _{bis}	140
5.3	Discrétisation spatiale du cylindre creux entier en éléments finis.	143
5.4	Discrétisation spatiale d'un quart de cylindre creux en éléments finis. . .	143
5.5	Numérotation des nœuds : a) numérotation circulaire, b) numérotation alternée	146
5.6	Évolution des quatre solutions trouvées pour la phase A : points de Gauss en charge plastique (en bleu), en charge-décharge élastique (en jaune).	150
5.7	Solution du problème à la fin de la phase A, t=4200 s : points en charge plastique en bleu, points en charge-décharge élastique.	152
5.8	Solution du problème à la fin de la phase A, t=4200 s : déformations plastiques équivalentes ε_{eq}^p (déplacements amplifiés d'un facteur 10). . .	152
5.9	Évolution du calcul ISO-1A et ISO-3A pour la phase A : points en charge plastique	153
5.10	Solution du problème à la fin de la phase A, t=4200 s : points en charge plastique en bleu, points en charge-décharge élastique.	154

5.11	Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : déformations plastiques équivalentes ε_{eq}^p (déplacements amplifiés d'un facteur 2). . . .	154
5.12	Changement de parcours de localisation, calcul ISO-2B (phase B) . . .	155
5.13	Comparaison des solutions entre la phase (A) et la phase (B)	155
5.14	Diamètre intérieur du cylindre creux $D_{int} = f(\theta)$ (phase B)	156
5.15	Convergence du problème : nombre d'itérations pour chaque pas	158
5.16	Convergence du problème : nombre de pas par rapport au temps du calcul	159
5.17	Convergence en force : calcul ISO-2A,B	160
5.18	Convergence en déplacement : calcul ISO-2A,B	160
5.19	État des points de Gauss et des contraintes pendant les itérations (pas 15).	162
5.20	Convergence du calcul pendant les itérations (step 20 et 21).	163
5.21	États de points de Gauss : solutions ultérieures trouvées avec changement de paramètres matériels, $\Delta t_{max} = \Delta t_o$	163
5.22	Convergence du calcul ISO-2A, pour les pas 15 et 20 pour chaque division du pas (paramètres f_{conve} et d_{conve}).	164
5.23	Convergence du calcul ISO-2A, pour le pas 21 pour chaque division du pas (paramètres f_{conve} et d_{conve}).	165
5.24	Convergence des trois degrés de liberté pour les pas 15 et 20 du calcul ISO-2A.	166
5.25	Convergence des trois degrés de liberté pour le pas 21 du calcul ISO-2A.	167
5.26	Évolution des quatre solutions trouvées pour la phase A : points de Gauss en charge plastique (en bleu), en charge-décharge élastique (en jaune).	169
5.27	Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : points en charge plastique (en bleu), en charge-décharge-plastique (en jaune).	171
5.28	Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : déformation plastique équivalente ε_{eq}^p	171
5.29	Évolution du calcul ANISO-1A et ANISO-3A : points en charge plastique (en bleu) et en charge-décharge élastique (en jaune) pour la phase A. .	172
5.30	Solution du problème à la fin de la phase B, $t=4200$ s : points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge (en jaune)	173
5.31	Solution du problème à la fin de la phase B, $t=4200$ s : déformation plastique équivalente ε_{eq}^p	173
5.32	Diamètre intérieur du cylindre creux $D_{int} = f(\theta)$ (phase B)	174
5.33	Convergence du problème : nombre d'itérations pour chaque pas. . . .	175
5.34	Convergence du problème : nombre du pas par rapport au temps du calcul.	176
5.35	Convergence en force : calcul ANISO-2A,B	177
5.36	Convergence en déplacement : calcul ANISO-2A,B	177
5.37	Points en charge plastique (bleu), décharge élastique (jaune), pendant les itérations.	178
5.38	Convergence du calcul ANISO-2A, pour les pas 11 et 14 pour chaque division du pas de temps (paramètres f_{conve} et d_{conve}).	179

5.39	Convergence du calcul ANISO-2A au cours des itérations, pas 16 et 17 : état des points de Gauss.	180
5.40	Pression d'eau sur les rayons horizontaux et verticaux pour les quatre solutions avec les lois de comportement Plasol et Plasol anisotrope. . .	181
5.41	Distribution de la pression d'eau à la fin de la phase A	182
5.42	Distribution de la pression d'eau à la fin de la phase A	182
5.43	Discrétisation temporelle et type de solution avec $\Delta t_{max} = \Delta t_o$	185
5.44	Zoom de chaque type de solution trouvée et donnée de la discrétisation temporel.	186
5.45	Calcul ISO-1A avec deux différentes machines : 32 bit, 64 bit	187
5.46	Calcul ISO-2A avec deux machines différentes : 32 bit, 64 bit	188
5.47	Comparaison du numéro d'itérations pour le calcul ISO-1A et ISO-2A lancés sur une machine à 32 et 64 bit.	189
5.48	Comparaison de la discrétisation temporelle pour le calcul ISO-1A et ISO-2A lancé sur une machine à 32 et 64 bit.	190
5.49	Calcul ANISO-1A avec deux machines différentes : 32 bit, 64 bit	191
5.50	Calcul ANISO-2B avec deux machines différentes : 32 bit, 64 bit	191
5.51	Détail de la zone plastifiée au pas 10	192
5.52	Comparaison du nombre d'itérations pour les calculs ANISO-1A et ANISO- 2A lancés sur une machine à 32 et 64 bit.	194
5.53	Comparaison de la discrétisation temporelle pour les calculs ANISO-1A et ANISO-2A lancés sur une machine à 32 et 64 bit.	195
5.54	Modélisation des essais de Lausanne sur un quart de cylindre creux : loi de comportement Plasol.	196
5.55	Modélisation des essais de Lausanne sur un quart de cylindre creux : loi de comportement Plasol anisotrope.	196
5.56	Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p à la fin de la phase B	197
5.57	a) Deuxième invariant de la déformation II_ε : essai 14 _{bis} . b) Déplacement sur le forage : essai 14 _{bis} , [91].	197
5.58	Déformée du forage pour les essais 13 _{bis} et 14 _{bis} (Images prises par [91]).	198
5.59	Déformée du forage pour les calculs ANISO-1, ANISO-4 (image de gauche) et ANISO-2, ANISO-3 (image de droite). En rose la forme du forage dans la configuration non-déformée.	198
6.1	Microstructure d'un milieu périodique, [41].	207
6.2	Exemple d'une fonction u périodique par rapport à y, [41].	209
6.3	Passage micro-macro à l'aide d'une technique d'homogénéisation numérique, FEM-DEM ou FEM-FEM.	210
6.4	Perte de l'hypothèse de périodicité de la microstructure, [21].	212
6.5	Exemple des forces cohésives dans la zone adjacente à une fissure.	213
6.6	Lois de comportement proposées pour la zone cohésive, [20].	213
6.7	Problèmes dans la définition d'une loi de comportement cohésive en grande déformation.	213

7.1	Identification de la structure du VER	218
7.2	Domaine mécanique : les grains (en blanc), les interfaces (en rouge) et le réseau fluide (en bleu)	219
7.3	(A) Configuration non-déformée, (B) Configuration déformée avec des conditions linéaires	221
7.4	(A) Configuration non-déformée, (B) Configuration déformée avec les conditions périodiques, (C) Configuration finale	222
7.5	Simulation de traction horizontale : évolution du calcul, Frey [68]	223
7.6	Schématisation des interfaces : a) configuration initiale, b) configuration déformée	227
7.7	Comportement tangentiel et normal pour les forces d'interfaces	228
7.8	Loi de comportement couplée	229
7.9	Bilan de masse fluide pour le noeud j	237
7.10	Profil du champ de vitesse dans deux plans parallèles	240
7.11	Profil du champ de vitesse dans une conduite	242
7.12	Ouverture du réseau fluide en fonction des ouvertures mécaniques	244
7.13	a) Microstructure du problème, b) Schématisation de la physique de l'interface, c) Modélisation de l'interface	245
7.14	a) Numérotation des interfaces fluides, b) Numérotation des noeuds fluides	246
7.15	Côté gauche de la matrice P_{ij}	250
7.16	Côté droit de la matrice P_{ij}	250
8.1	Bloc bleu ciel de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau^1}]_{ij}$	257
8.2	Maillage du domaine à l'échelle macroscopique figure a), maillage du domaine à l'échelle microscopique figure b).	259
8.3	Contrainte du mélange de la micro-structure : problème de traction isotrope en déplacement	261
8.4	Comportement des interfaces de la microstructure : traction isotrope	264
8.5	Forces des interfaces de la microstructure : traction isotrope	265
8.6	Comparaison de l'état de contrainte : comportement linéaire.	266
8.7	Erreur relative sur la contrainte calculée : comportement linéaire.	267
8.8	Solution en contrainte avec FEM^2 et avec le code micro	268
8.9	Erreur relative entre la solution micro et la solution avec FEM^2	268
8.10	Convergence du problème en fonction de la perturbation ϵ	270
8.11	Comportement du paramètre de convergence en force	271
8.12	Comportement du paramètres de convergence en déplacement	271
8.13	Comportement du milieu homogénéisé : compression isotrope	272
8.14	Comportement de la microstructure : compression isotrope	273
8.15	Comportement de la microstructure : forces des interfaces horizontales et verticales.	273
8.16	Comparaison des contraintes avec un comportement linéaire	274
8.17	Comparaison des contraintes avec le code micro	275
8.18	Convergence du problème en fonction de la perturbation ϵ	276

8.19	Comportement du paramètre de convergence en force	277
8.20	Comportement du paramètre de convergence en déplacement	277
8.21	Cisaillement pur	278
8.22	Évolution des contraintes.	279
8.23	Comportement de la microstructure : problème de cisaillement pur . . .	280
8.24	Forces des interfaces : problème de cisaillement pur	281
8.25	Domaine à l'échelle macroscopique, a). Pression d'eau p_w à l'échelle macroscopique, b)	284
8.26	Contrainte horizontale σ_{xx} à l'échelle macroscopique	284
8.27	Contrainte horizontale σ_{yy} à l'échelle macroscopique	285
8.28	Flux massique horizontale m_{yy} à l'échelle macroscopique	285
8.29	État des forces orthogonales d'interface : en vert un état élastique de traction, en noir un état élastique de compression	286
8.30	Forces tangentielles horizontales de la microstructure	287
8.31	Forces tangentielles verticales de la microstructure	288
8.32	Flux massique horizontale m_{yy} à l'échelle macroscopique	289
9.1	Microstructure d'une grès a), Besuelle et al. [28] et d'une roche argileuse b), Hemes et al. [77].	297
B.1	Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-1	307
B.2	Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-2	308
B.3	Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-3	309
B.4	Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-4	310
B.5	Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-1	311
B.6	Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-2	312
B.7	Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-3	313
B.8	Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-4	314
B.9	Profil de pressions d'eau pour les calculs ISO-1, ISO-2, ISO-3, ISO-4 . .	315
B.10	Convergence en force : calcul ISO-1A,B	316
B.11	Convergence en déplacement : calcul ISO-1A,B	316
B.12	Convergence en force : calcul ISO-3A,B	317
B.13	Convergence en déplacement : calcul ISO-3A,B	317
B.14	Convergence en force : calcul ISO-4A,B	318
B.15	Convergence en déplacement : calcul ISO-4A,B	318
B.16	Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-1	319
B.17	Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-2	320

B.18 Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-3	321
B.19 Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-4	322
B.20 Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-1	323
B.21 Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-2	324
B.22 Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-3	325
B.23 Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-4	326
B.24 Profil de pressions d'eau pour les calculs ANISO-1, ANISO-2, ANISO-3, ANISO-4	327
B.25 Convergence en force : calcul ANISO-1A,B	328
B.26 Convergence en déplacement : calcul ANISO-1A,B	328
B.27 Convergence en force : calcul ANISO-3A,B	329
B.28 Convergence en déplacement : calcul ANISO-3A,B	329
B.29 Convergence en force : calcul ANISO-4A,B	330
B.30 Convergence en déplacement : calcul ANISO-4A,B	330

Liste des tableaux

2.1	Algorithme de Newton-Raphson pour un système non-linéaire d'équations	58
2.2	Algorithme de Newton-Raphson pour la méthode des éléments finis.	80
4.1	Conditions de Kuhn-Tucker et de cohérence	105
4.2	Algorithme de <i>return-mapping</i> d'une loi élasto-plastique (Ortiz et Simo [114]).	121
5.1	Paramètres mécaniques	144
5.2	Paramètres hydrauliques	145
5.3	Données pour la gestion de la discrétisation temporelle du calcul	151
5.4	Données pour la gestion de la discrétisation temporelle du calcul	170
7.1	Description des fonctions f_{tt} et f_{nn} .	228
7.2	Algorithme de résolution du système fluide	251
7.3	Algorithme de résolution du problème aux éléments finis sur la microstructure	254
8.1	Algorithme de résolution numérique du problème aux limites à deux échelles.	258
8.2	Paramètres mécaniques et physiques de la microstructure.	260
8.3	Conditions au limites du problème : tirage isotrope	261
8.4	État homogène de contrainte : traction isotrope.	263
8.5	Erreur relative entre la solution FEM^2 et celle micro	269
8.6	État homogène de contrainte : cas de compression isotrope (loi de contact linéaire).	274
8.7	Conditions au limites du problème : cisaillement pur	278

Première partie

Introduction Générale

Chapitre 1

Introduction

1.1 La localisation de la déformation

"La localisation de la déformation est un phénomène à la fois banal et fascinant. Banal parce qu'il apparaît dans un large éventail de situations et de matériaux [...], fascinant, il l'est en ceci que la localisation fait apparaître brutalement, dans un champ de déformation homogène ou à hétérogénéité douce, une structure très typée, connue sous le nom de bande de cisaillement, et que cette apparition prend dans un certain nombre de cas une dimension catastrophique par incapacité soudaine de la structure considérée à soutenir le chargement appliqué lors des étapes antérieures..."

Ci-dessus Desrues [52] utilise l'expression *localisation des déformations* pour définir le processus qui amène les déformations à se concentrer dans une zone à très faible épaisseur où leur intensité est très importante. Ce processus de localisation conduit à la rupture du matériau. Au voisinage de la rupture, le comportement est déterminé par l'évolution de la zone qui présente une localisation des déformations. Il est donc important de comprendre les mécanismes qui amènent à l'apparition de ces zones, surtout si nous considérons que cette concentration des déformations provoque la rupture dans des ouvrages réels.

Dans les essais de laboratoire, on observe dans la plupart des cas que le déclenchement de la localisation marque de façon soudaine le passage d'un état homogène de la déformation à un état fortement hétérogène. Les zones à déformation localisée apparaissent sous la forme de structures assez régulières qui prennent le nom de *bandes de localisation*. Selon la cinématique qui les caractérise, il est possible de parler de *bandes de cisaillement* si les déformations de cisaillement sont dominantes, ou de *bandes de compaction/dilatation* si elles sont caractérisées par une zone de forte compression/dilatation. On trouve généralement à la fois des déformations de cisaillement et des déformations volumique, on peut donc parler de *bandes de cisaillement compactantes* ou *bandes de cisaillement dilatantes* (figure 1.1).

En figure, 1.2 nous montrons l'apparition d'une bande de cisaillement dans deux cas

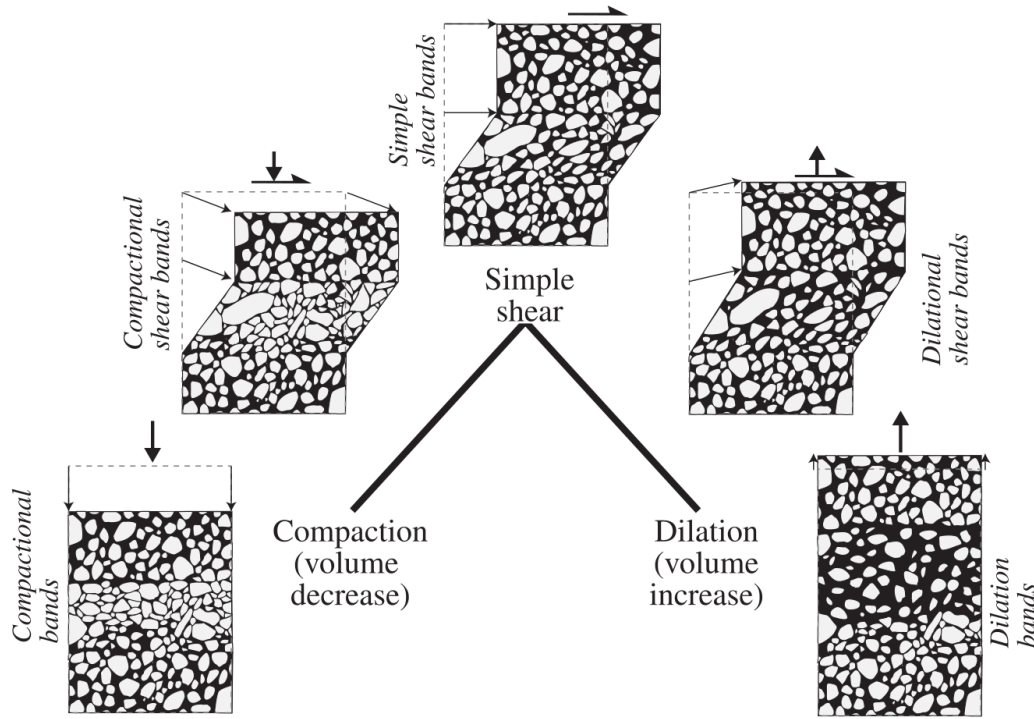


FIGURE 1.1 – Classification cinématique de la localisation des déformations pour les grès, Fossen [67].

différents, la première apparaît lors d'un essai triaxial à la "petite échelle" (l'échelle du laboratoire, figure 1.2.a) et l'autre est observée après la survenue d'un tremblement de terre à la "grande échelle" (l'échelle d'une faille figure 1.2.b).

D'un point de vue expérimental, l'apparition des bandes de localisation a été initialement interprétée comme un phénomène causé par une mauvaise qualité de l'appareil expérimental à cause duquel l'échantillon perdait l'état homogène de la déformation.

La reproductibilité du phénomène dans différents matériaux a conduit plusieurs expérimentateurs à étudier les bandes de localisation en prouvant qu'elles dépendent du matériau envisagé, de la géométrie initiale de l'échantillon et aussi des conditions aux limites imposées. Il est possible de caractériser ces bandes à l'aide de grandeurs comme le *moment de déclenchement*, l'*orientation*, le *nombre des bandes* et l'*épaisseur*.

Entre les grandeurs ci-dessus citées, l'épaisseur est celle qui semble jouer un rôle crucial. En effet, un état de déformation homogène peut être vu comme un état du matériau où les déformations localisées ont une épaisseur infinie, ce qui montre l'importance de cette grandeur caractéristique pour décrire la réponse mécanique dès que la déformation cesse d'être homogène (Kotronis et al. [85]). Les études menées sur l'épaisseur de la bande montrent qu'elle dépende des caractéristiques microstructurales du matériau. Pour un matériau granulaire, par exemple, l'épaisseur de la bande semble comprise entre 15 et 30 fois le diamètre moyen des grains. (Roscoe [124], Vardoulakis

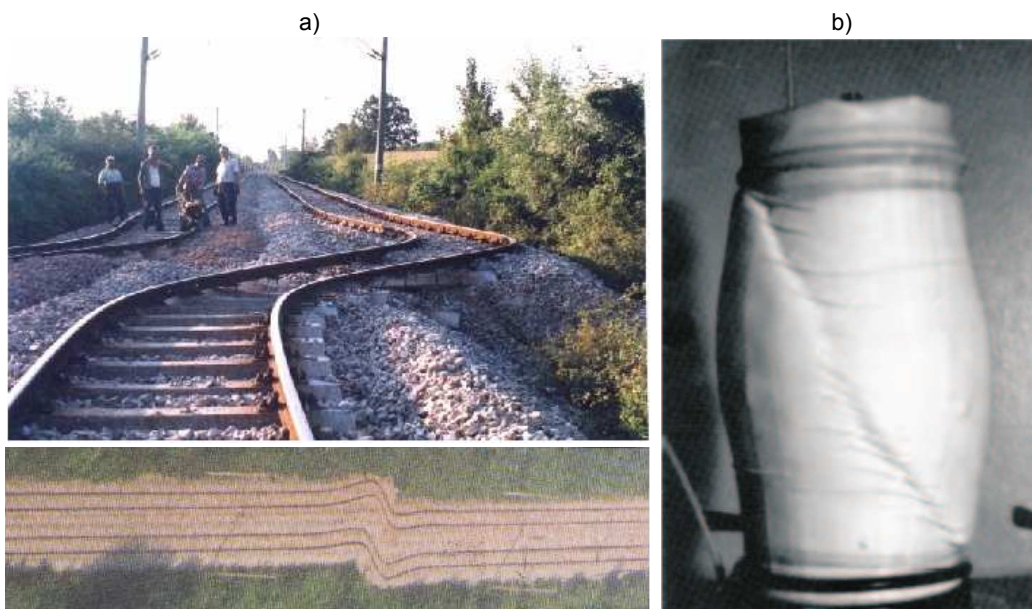


FIGURE 1.2 – Phénomènes de localisation des déformations dans les géomatériaux : a) Tremblement de terre en Turquie [148], b) Essai de compression triaxiale dans un échantillon de sable, [44].

[145], Desrues [52]). L'épaisseur représenterait donc une propriété du matériau qui caractérise le comportement en régime de localisation.

Dans les essais mécaniques, utilisant les techniques classiques avec capteurs positionnés aux extrémités supérieur et inférieur des éprouvettes, les mesures ne fournissent qu'une information sur la réponse mécanique globale de l'échantillon. Afin de pouvoir estimer de façon locale les déformations d'un matériau, des techniques de mesure de champ ont été développées.

Dans les années soixante, Roscoe [123], [124] applique la *radiographie à rayons X* afin de suivre la position d'un point matériel durant un essai en déformations planes à partir d'une grille de marqueurs (figure 1.3). En comparant la radiographie de l'essai pour deux temps consécutifs, il est possible d'effectuer une mesure du champ de déplacement et donc d'en déduire le champs des déformations. Grâce à une distribution de densité variable dans le matériau et donc une différence d'absorption de rayons X, il est possible de voir les différentes bandes de localisation dans le sol. Les principales limites de la radiographie à rayons X sont liées au manque de données sur les changements de densité et à la limitation aux images 2D. La technique de *tomographie à rayons X* permet de dépasser cette limite : elle consiste à soumettre l'échantillon à des rayons X pour différentes positions afin de reconstruire l'image 3D avec des algorithmes mathématiques. De cette façon, il est possible de caractériser en 3D la structure interne d'un échantillon (i.e. porosité, fissuration) ainsi qu'en suivre l'évolution au cours de l'essai.

La technique de la *stéréophotogrammétrie* développée par exemple par Desrues [52], [54] dans les années quatre-vingt, consiste à comparer deux images de l'échantillon qui se déforme prises par le même point de vue pendant le parcours de chargement. La déformation est perçue par un relief fictif en utilisant l'effet stéréoscopique entre deux images successives. Grâce aux développements de techniques alternatives comme la *Correlation d'Images Digitales*, (*DIC*), il est possible d'avoir une meilleure précision sur la mesure des champs. En effet, cette méthode utilise des images digitales au lieu des photographies, en tous les avantages du traitement numérique des images (analyse d'images numérique). Une revue très complète des techniques pour les mesures de champ est présentée par Viggiani et Hall en 2012 [149].

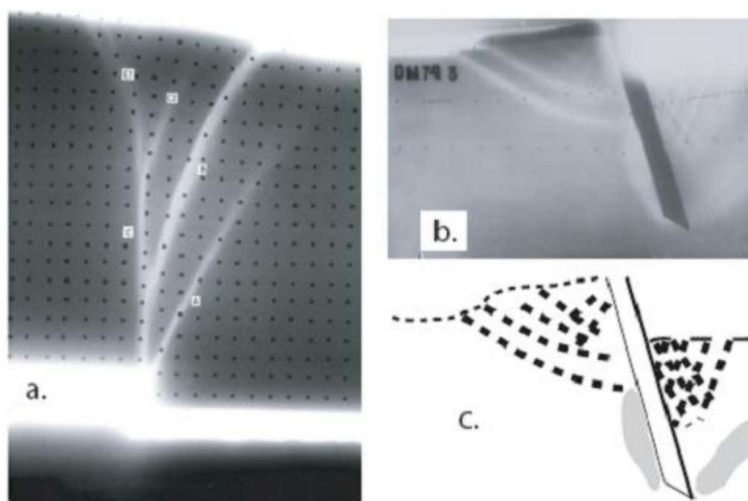


FIGURE 1.3 – Essais à rayon X réalisés par Roscoe [124].

Du point de vue théorique, la localisation des déformations peut être vue comme un phénomène de *bifurcation*, c'est-à-dire un changement de chemin, d'un parcours de comportement fondamental à un parcours alternatif. Il est donc possible de parler de *point de bifurcation* comme du point de perte d'unicité de la solution du problème aux limites. Plusieurs auteurs ont traité le problème de non-unicité de façon générale (Hill, [79], Hadamard [75] et Mandel [95]). Rice en 1976 [121] propose une théorie qui permet d'établir, pour un milieu continu infini, une éventuelle apparition des déformations localisées sous la forme de bandes de cisaillement et, en même temps, ses possibles orientations.

Comme il a été remarqué par Desrues [52] "*la loi de comportement intervient de façon cruciale dans la condition de perte d'unicité. L'étude de localisation est, de ce fait, vue de plus en plus comme élément de test pour les lois, et même pourrait devenir un élément de calage de celles-ci, c'est à dire intervenir au niveau même de leur conception et de leur ajustement*".

Les lois de comportement jouent un rôle fondamental pour décrire la non-unicité d'un

problème aux limites. Les résultats théoriques ne peuvent pas s'appliquer toujours à n'importe quelle loi de comportement mais il est systématiquement possible d'analyser les problèmes de non-unicité de façon numérique.

Les essais expérimentaux ne peuvent pas être utilisés pour caler les lois de comportement classiques de la mécanique des milieux continus en régime de localisation en raison de la perte d'homogénéité de la déformation. Autrement dit, la réponse mécanique de l'échantillon ne peut plus être considérée comme représentative du comportement du point matériel du milieu continu équivalent envisagé pour la modélisation. Généralement les lois de comportement classiques ne permettent pas d'introduire une information, rappelons-le, sur la largeur de la bande qui représente une propriété du matériau en régime de localisation. En utilisant les modèles classiques le problème devient très singulier, et une infinité des solutions est possible. D'un point de vue numérique, les solutions trouvées montrent une forte dépendance du maillage car la largeur de la bande est proportionnelle à la taille de l'élément, ce qui n'est pas admissible. Il est donc nécessaire que la discrétisation du domaine à travers le maillage n'ait pas d'influence majeure sur la solution.

Plusieurs modèles ont été proposés pour décrire de façon objective la localisation des déformations. Toutes ces différentes approches ont en commun l'introduction d'une longueur interne, qui permet de donner à la loi de comportement une donnée constitutive sur l'épaisseur de la bande de localisation pendant son évolution. Ce faisant, la solution numérique d'un problème aux limites est objective par rapport au maillage. Dans ce cas, le problème aux limites est dit *régularisé*. L'approche utilisée dans cette thèse considère un enrichissement de la cinématique du milieu continu classique en suivant la théorie des milieux avec microstructure de Germain. Dans ce cadre nous allons considérer un cas particulier, celui des milieux avec une cinématique de type second gradient.

1.2 Structure de la thèse

Dans cette thèse nous présentons deux approches différentes pour décrire le comportement couplé des géomatériaux. Notamment, dans la première, nous avons envisagé une approche phénoménologique fondée sur des hypothèses faites à une échelle macroscopique alors que, dans la deuxième, nous avons utilisé un processus d'homogénéisation numérique (la méthode des éléments finis aux carrés) où le comportement couplé est déduit directement à partir des hypothèses faites sur une échelle d'observation microscopique.

Ce mémoire se divise en cinq parties. Dans la partie II nous présentons la formulation des modèles locaux de second gradient pour des milieux saturés ainsi que la linéarisation des équations d'équilibre afin de résoudre un problème aux conditions aux limites avec la méthode des éléments finis. Pour la description du comportement

hydromécanique, nous envisageons deux approches différentes pour définir un milieu poreux ; ces deux approches sont détaillées dans les parties III et IV.

La partie III est consacrée à la présentation des lois élastoplastiques en petites déformations Plasol et Plasol anisotrope, celle ci étant caractérisée par l'introduction de l'anisotropie transversale au niveau élastique. Ces deux lois de comportement ont été utilisées pour modéliser des essais de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne sur un cylindre creux réalisés dans la cadre du projet européen Timodaz pour l'étude du stockage de déchets radioactifs. Le problème de non-unicité est traité pour les calculs faits avec les deux lois de comportement. Nous montrons que l'utilisation de différentes discrétisations temporelles représente une condition suffisante pour changer l'initialisation de l'algorithme de Newton-Raphson ; ce qui rend possible l'obtention de plusieurs solutions.

Dans la partie IV nous considérons une méthode d'homogénéisation numérique (méthode des éléments finis aux carré, FEM²) pour décrire le comportement hydromécanique d'un milieu périodique. De cette manière, deux échelles d'observation peuvent être considérées, celle au niveau microscopique où on définit la microstructure du milieu, et celle au niveau macroscopique caractérisée par un milieu continu équivalent. Cette méthode permet de définir numériquement la loi de comportement à partir des hypothèses faites sur la géométrie de la microstructure du milieu, et sur les lois de comportement utilisées pour modéliser les composantes qui constituent le milieu au niveau microscopique.

Dans la partie V nous présentons les principales conclusions et les perspectives de recherche ouvertes par le présent travail de thèse. Dans la suite de cette mémoire la convention de sommation d'Einstein a été utilisée pour indiquer les opérations vectorielles et matricielles envisagées.

Deuxième partie

Comportement couplé des
géomatériaux :
deux approches de modélisation
numérique

Chapitre 2

Modélisation de la localisation à l'aide des modèles couplés de second gradient

2.1 L'introduction d'une longueur interne

Les milieux continus de la mécanique classique ne sont pas capables de prédire de façon objective le comportement d'un matériau dès lors qu'il présente des déformations fortement hétérogènes comme dans les cas de localisation des déformations. Ces modèles ne prennent pas en compte les mécanismes microstructuraux (arrangement des grains dans les matériaux granulaires ou le développement de micro fissures dans les matériaux cohésifs) qui conduisent à l'apparition soudaine des bandes de localisation et qui déterminent la largeur de ces zones à déformations localisées. Cette grandeur caractérise le comportement de la structure du matériau à l'échelle macroscopique et elle représente donc une propriété du matériau en régime de post-localisation. La largeur de ces zones à déformations localisées est contrôlée par des propriétés intrinsèques à l'échelle mesoscopique.

Les modèles classiques n'apportent aucune information sur la largeur d'une bande de localisation donc, d'un point de vue théorique, une infinité de solutions est possible. D'un point de vue numérique l'utilisation de ces modèles pour résoudre un problème aux limites en régime de post-localisation permet de trouver des solutions qui dépendent du maillage c'est-à-dire que la largeur de la bande est proportionnelle à la taille de l'élément. De cette façon si nous considérons un maillage très fin dans lequel la taille de l'élément tend vers zéro, l'énergie dissipée tend aussi à zéro puisqu'elle est toute concentrée à l'intérieur de la zone à déformations localisées. Cela implique que l'énergie de déformation du matériaux est conservée ce qui est physiquement impossible.

Un exemple simple qui montre l'importance de la longueur interne sur la réponse mécanique du milieu a été montré par Kotronis et al. [84] en résolvant le problème

d'une couche d'épaisseur L soumise à cisaillement pure. Il remarque que si en présence de localisation l'épaisseur l de la zone localisée est supérieur à l'épaisseur de la couche L , la solution du problème au cisaillement sera homogène alors que si l'épaisseur de la zone localisée l tend vers zéro, la réponse du matériau sera proche de sa réponse élastique.

Il est ainsi nécessaire d'introduire dans les modèles une longueur interne qui puisse traduire les mécanismes hétérogènes à l'échelle microscopique et qui puisse caractériser l'épaisseur de la bande au niveau macroscopique en phase de post-localisation. Plusieurs approches ont été formulées en littérature, tous ont pour objectif l'introduction d'une longueur interne. Dans le cadre d'une approche à l'aide d'un milieu continu nous citons les modèles suivants :

- Les modèles viscoplastiques consistent à introduire une viscosité dans la loi de comportement. Il est possible de montrer mathématiquement que l'ajout de ce terme implique l'introduction d'une longueur interne. Elle semble donner un effet régularisateur aux problèmes dynamiques. Pour les problèmes quasi-statiques le terme visqueux ne permet pas de considérer l'influence des points matériels voisins, donc l'épaisseur de la bande n'est pas bien contrôlée. Cette approche a été utilisée par Duvant et Lions [58], Needleman [109], Loret et Prevost [93] et Sluys [130].
- Les modèles non-locaux ne considèrent pas une relation locale entre la déformation et la contrainte comme dans les lois de comportement classiques mais ils définissent cette relation par une opération de moyenne spatiale autour du point matériel. De cette façon l'introduction d'une longueur interne peut régulariser la solution d'un problème aux limites.
- Les modèles locaux avec microstructure, fondés sur la théorie de Germain [72], considèrent un milieu continu à l'échelle microscopique pour lequel la cinématique est enrichie par des termes d'ordre supérieur. Il est donc nécessaire d'introduire des variables en contraintes conjuguées à cette cinématique qui introduisent de façon implicite une longueur interne.

Dans le cadre des modèles non-locaux nous présentons dans la section 2.1.1 deux approches différentes, celle où l'opération de moyenne est exprimée sous forme intégrale et celle où cette opération est introduite à l'aide de terme de gradient supérieur sur la déformation.

Dans la section 2.2 nous présentons la théorie des milieux de type second gradient comme un cas particulier de la théorie de Germain. Elle sera utilisée dans la partie III pour obtenir des solutions régularisées en phase de post-localisation. Dans cette thèse nous avons utilisé deux approches différentes pour caractériser la contrainte de Cauchy d'un milieu poreux, elles seront présentées dans la section 2.3. Les détails de la

formulation numérique aux éléments finis pour un milieu continu second gradient sont exposés en section 2.4. La dernière section est consacrée à une brève présentation du problème de non-unicité qui sera traité dans la partie IV de ce mémoire.

2.1.1 Les modèles non-locaux

Les modèles non-locaux ont été formulés par Eringen et al. en 1972 [61] pour des milieux élastiques et ensuite dans le cadre de l'élastoplasticité en 1982 [62]. Dans cette approche le comportement du point matériel dépend aussi de la contribution de son voisinage. Le principe d'action local selon lequel, *en considérant deux points donnés A et B, une influence extérieure sur A ne provoque pas d'effets immédiats sur B* n'est donc plus respecté.

Les modèles intégrales non-locaux

Bazant et al. en 1982 [16] propose un modèle non local pour une partie des déformations alors que les autres sont définies de façon locale (équation 2.1.a).

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V_r(x_i)} \int_V g(s_i) \varepsilon_{ij}(x_i + s_i) dV \quad \left\{ \begin{array}{l} g(s_i) = e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{s_i s_i}{l^{in}} \right]^2} \\ V_r(x_i) = \int_V g(s_i) dV \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$V_r(x_i)$ représente le volume représentatif sous forme d'une sphère centrée sur le point matériel x_i (équation 2.1.b²).

$g(s_i)$ est une fonction de pondération généralement prise égale à la fonction d'erreur de Gauss (équation 2.1.b¹). Cette fonction dépend du paramètre l^{in} qui représente la longueur interne du modèle non-local.

Pijaudier-Cabot et Bazant [116] ont proposé un modèle d'endommagement dans le cadre d'une théorie non locale. Dans cette théorie de l'endommagement la contrainte est écrite avec une loi de comportement élastique qui est multipliée par un paramètre scalaire décrivant la détérioration du matériau de façon isotrope (équation 2.2.a). La variable ς^{eq} est déterminée par une loi d'évolution dans laquelle elle représente une mesure de la déformation équivalente proposée par Mazars et Pijaudier-Cabot [98] selon l'équation 2.2.b².

$$\sigma_{ij} = (1 - \varpi) D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi = f(\varsigma^{eq}) \\ \varsigma^{eq} = \left[\sum_{i=1}^3 (< \epsilon_{ii} >)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } \epsilon_{ii} > 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Pour obtenir le modèle non-local les variables ϖ et ς^{eq} sont remplacées avec leurs valeurs moyennes formulés de la même manière que l'équation 2.1.a.

Dans le cadre de l'élastoplasticité l'utilisation de la formulation non-locale montre une difficulté ultérieure puisque l'application de l'équation de consistance amène à une équation différentielle au lieu d'une équation algébrique. Si le volume représentatif V dépasse la frontière du milieu il est nécessaire d'ajouter des conditions aux limites supplémentaires.

Les modèles non locaux élastoplastique second gradient

Les modèles à dérivées supérieures ont été introduits par Aifantis [1]. Dans la théorie de l'élastoplasticité les dérivées de second gradient vont apparaître dans les composantes de la déformation plastique et dans la règle d'écoulement. Muhlhaus et Aifantis [106] ont montré que ces modèles de gradient peuvent être considérés comme un cas particulier des modèles non-locaux. En considérant une fonction $g(s)$ unitaire et en appliquant un développement de Taylor au deuxième ordre à l'équation 2.1 nous obtenons ainsi l'équation 2.3. Nous parlerons donc de modèles non locaux élastoplastiques de second gradient.

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(x) &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \dot{\varepsilon}^p(x+s) ds = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \left[\dot{\varepsilon}^p(x) + s \frac{d\dot{\varepsilon}^p(x)}{ds} + \frac{s^2}{2} \frac{d^2\dot{\varepsilon}^p(x)}{ds^2} + \dots \right] ds \\ &\cong \dot{\varepsilon}^p(x) + \frac{a}{24} \frac{d^2\dot{\varepsilon}^p(x)}{ds^2} = \dot{\varepsilon}^p(x) + l \frac{d^2\dot{\varepsilon}^p(x)}{ds^2}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Deux approches différentes peuvent être mentionnées, la première (Muhlhaus et Aifantis [106]) est celle dans laquelle on considère le Laplacien de la déformation équivalente ε_{ij}^{eq} dans le critère de charge (équation 2.4).

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{eq}, \nabla^2 \varepsilon_{ij}^{eq}) = 0 \quad (2.4)$$

Une autre approche est celle suivie par Vardoulakis et Aifantis et [146] et Zervos [157] et dans laquelle le second gradient est introduit au niveau de la règle d'écoulement et de la surface de charge (équation 2.5). Dans ce modèle les longueurs internes sont introduites de façon explicite.

$$f(\tau_{ij}, \psi) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tau}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\alpha}_{ij} \\ \dot{\sigma}_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}^e (\dot{\varepsilon}_{kl}^e - l_e^2 \nabla^2 \dot{\varepsilon}_{kl}^e) \\ \dot{\alpha}_{ij} = -\mathbb{C}_{ijkl}^e (l_p^2 \nabla^2 \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Dans ces deux modèles l'écriture de l'équation de consistance amène à une équation différentielle sur le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ qui introduit une nouvelle constante et complique la solution du problème aux éléments finis. Deux solutions différentes ont été proposées par Pamin [115] et Zervos [157].

Dans la première on considère que le multiplicateur plastique est un degré de liberté supplémentaire. De cette façon on discrétise la condition de consistance et on ajoute des conditions aux limites ultérieures. La deuxième propose pour le calcul de $\dot{\lambda}$ une solution approximative qui permet d'atteindre une expression analytique du multiplicateur

plastique.

Les modèles non locaux à gradient de déformations permettent d'introduire une longueur interne capable d'obtenir des solutions numériques objectives par rapport au maillage. Néanmoins ces modèles ne sont pas formulés à partir d'une théorie générale de façon indépendante à la définition de la loi de comportement. De plus il est nécessaire de résoudre une équation différentielle pour le calcul du multiplicateur de Lagrange ce qui d'un pont de vue numérique rajoute une complexité importante.

La théorie des milieux avec microstructure permet de dépasser ces difficultés. Elle est définie par un enrichissement de la cinématique qui implique des composantes de plus dans l'équation du principe de travail virtuel. De cette façon n'importe quelle loi de comportement peut être utilisée pour modéliser la contrainte de Cauchy du milieu. L'introduction de la loi de comportement du milieu enrichi permet de régulariser le problème grâce à l'introduction implicite d'une longueur interne.

Au niveau numérique l'enrichissement du milieu n'implique pas une complexité dans la solution obtenue d'un problème aux limites. Il peut continuer à être résolu de façon classique avec un algorithme de Newton-Raphson.

2.2 Les milieux continus avec microstructure

Nous parlons de milieux continus avec microstructure ou de milieux d'ordre supérieur pour ceux qui introduisent le concept de microstructure du milieu. De cette façon la cinématique de ces milieux sera enrichie par ses déformations microscopiques identifiées par des dérivées d'ordre supérieures. Cette approche introduit une dépendance en espace à l'aide d'une longueur interne qui permet de modéliser certains problèmes qui montrent un effet d'échelle, comme, par exemple, les phénomènes de localisation des déformations.

Les principes généraux des milieux avec microstructure ont été introduits par Toupin [137] et Mindlin [104]. Germain en 1973 [72], [71] en va donner une formulation plus générale définie à partir de la méthode des puissances virtuelles. Une telle approche permet de généraliser les cas des milieux avec microstructure proposés par les frères Cosserat et ceux à second gradient. Plus récemment Forest et Sievert ont classifié les milieux micromorphiques en fonction des degrés de liberté concernant la cinématique [66] envisagée.

2.2.1 La théorie de Germain : cas général

Plutôt que calculer la loi de comportement à partir d'un potentiel (Mindlin et Eshel [105]), ce qui implique de considérer un système dont l'énergie reste constante, Germain utilise le principe du travail virtuel pour lequel la cinématique du milieu à l'échelle microscopique est également envisagée.

La cinématique du milieu sera définie en partant du champ de déplacement u_i :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + R_{ij} \quad (2.6)$$

$$\boxed{\underbrace{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Déformations macro}} \quad \underbrace{R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{Rotations macro}}} \quad (2.7)$$

En définissant v_{ij} en tant que un champ de déformations microstructurales nous décrivons la cinématique à l'échelle microscopique.

$$v_{ij} = d_{ij} + r_{ij} \quad (2.8)$$

$$\boxed{\underbrace{d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{ji})}_{\text{Déformations micro}} \quad \underbrace{r_{ij} = \frac{1}{2} (v_{ij} - v_{ji})}_{\text{Rotations micro}}} \quad (2.9)$$

En considérant les variables duales en contrainte de la cinématique microscopique et macroscopique nous pouvons écrire une expression générale du travail des efforts

virtuels intérieurs selon l'équation 2.10 en utilisant une étoile * pour les quantités virtuelles :

$$w_{int}^* = \underbrace{h_i u_i^* + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}}_{\text{travail virtuel macro}} + \underbrace{\tau_{ij} v_{ij}^* + \Sigma_{ijk} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k}}_{\text{travail virtuel micro}} \quad (2.10)$$

Les quantités virtuelles u_i^* , v_{ij}^* sont choisies de façon arbitraire, elles doivent respecter les conditions aux limites et présenter une dérivée continue. Dans l'approche de Germain, la cinématique de la microstructure est indépendante de celle qui concerne la macrostructure. Au niveau macroscopique on considère un champ de déplacement et son gradient. De la même manière, on considère au niveau microscopique un champ d_{ij} et son gradient.

Le principe des travaux virtuels ne doit pas dépendre du référentiel par rapport auquel il est défini. En utilisant ce principe (principe d'objectivité par rapport aux référentiels) nous pouvons montrer que les efforts virtuels intérieurs peuvent être réécrits avec l'équation 2.11.

$$w_{int}^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \tau_{ij} \left(v_{ij}^* - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) + \Sigma_{ijk} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k} \quad (2.11)$$

Le travail virtuel intérieur pour un milieu micromorphique se présente ainsi selon l'équation 2.12.

$$W_{int}^* = \int_{\Omega} w_{int}^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \tau_{ij} \left(v_{ij}^* - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) + \Sigma_{ijk} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k} \right] d\Omega \quad (2.12)$$

Le travail virtuel externe se présente selon l'équation suivante :

$$W_{ext}^* = \int_{\Omega} (f_i u_i^* + G_{ij} v_{ij}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (t_i u_i^* + T_{ij} v_{ij}^*) ds \quad (2.13)$$

De cette façon l'équilibre peut être défini avec l'équation 2.14.

$$W_{ext}^* = W_{int}^* \quad \forall u_i^*, v_{ij}^* \in C^1 \quad (2.14)$$

Formulation forte de l'équilibre

Comme les formulations forte et faible de l'équilibre sont équivalentes, nous pouvons passer de l'une à l'autre à travers une intégration par parties et en utilisant le théorème de la divergence. Les équations d'équilibre pour un milieu avec microstructure peuvent se récrire comme suit :

$$\frac{\partial (\sigma_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\sigma_{ij} - \tau_{ij}) n_j = t_i \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \Sigma_{ijk}}{\partial x_k} - \tau_{ij} = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \Sigma_{ijk} n_k = T_{ij} \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (2.16)$$

2.2.2 Les milieux continus de Cosserat

Les frères Cosserat ont développé en 1909 [46] une théorie élastique de milieu continu enrichissant la cinématique avec des microrotations pour chaque point matériel. Envisageant un problème en déformation plan dans un repère (O,x,y) les degrés de liberté peuvent être définis comme suit :

$$[u_i]^T = [u_x, u_y, \omega_z] \quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \omega_z \\ \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \omega_z & \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{cases} \quad (2.17)$$

Les composantes cinématique de l'équation 2.17.b peuvent être vues comme des déformations relatives entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. En considérant les dérivées des microrotations ω_z , on introduit de nouvelles quantités appelées microcourbure du milieu 2.18.

$$k_{xz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \quad k_{yz} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \quad (2.18)$$

Les variables cinématiques et statiques qui caractérisent le milieu continu de Cosserat sont montrées dans les équations 2.19.a et 2.19.b. Afin d'obtenir une expression de l'énergie cohérente d'un point de vue dimensionnel, une longueur l est introduite dans cette équation.

Les composantes cinématiques et statiques concernant les microrotations sont reliées par un module de flexion. Le rapport entre ce module et le module de Young a la dimension d'une longueur dont l'introduction permet de régulariser le problème numérique par rapport aux maillage.

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yx} \quad k_{xz}l \quad k_{yz}l] \quad [\sigma] = \left[\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yx} \quad \frac{m_{xz}}{l} \quad \frac{m_{yz}}{l} \right] \quad (2.19)$$

Brown et Evans [26] ont appliqué le concept du milieu de Cosserat aux matériaux granulaires. Muhlhaus et Vardoulakis [107] ont utilisé cette théorie dans le cadre de l'élasto-plasticité en montrant que l'effet dû à l'introduction du milieu de Cosserat est observable au-delà de l'état de bifurcation. De façon qualitative ils prouvent aussi que la bande de cisaillement a une épaisseur proportionnelle à la dimension moyenne des grains comme supposé par Roscoe. Sulem et Vardoulakis [131] ont proposé une analyse de bifurcation pour des essais de compression triaxiale sur des échantillons de roche. De Borst [50] et Sluys [130] utilisent le milieu de Cosserat dans le cadre d'un milieu élasto-plastique avec une surface de charge de Von-Mises. Ils montrent que l'effet de régularisation dû à l'introduction d'une longueur interne n'est efficace que pour des cas où la rupture arrive pour des fortes déformations de cisaillement (mode II). Pour une rupture en mode I, les rotations du milieu de Cosserat sont trop faibles pour permettre une régularisation efficace. Une telle approche ne peut donc pas modéliser des déformations localisées en bandes de compaction, souvent présentes dans les géomatériaux.

En écrivant dans l'équation 2.12 que les déformations microscopiques sont nulles $d_{ij} = 0$, il est possible de retrouver la théorie des milieux de Cosserat.

$$d_{ij} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{ij} = r_{ij} \implies v_{ij} = -v_{ji} \\ \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} = -\frac{\partial v_{ji}}{\partial x_k} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

L'équation 2.11 peut donc se récrire comme suit :

$$w_{int}^* = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \tau_{ij} \left(r_{ij}^* - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) + \Sigma_{ijk} \frac{\partial r_{ij}^*}{\partial x_k} = \quad (2.21)$$

$$= \alpha_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \tau_{ij} (r_{ij}^* - R_{ij}^*) + \Sigma_{ijk} \frac{\partial r_{ij}^*}{\partial x_k} \quad (2.22)$$

α_{ij} est égal à $\sigma_{ij} - \tau_{ij}$.

En imposant des états de déformation plan avec la machine $1\gamma 2\varepsilon$ (Laboratoire 3S-R) sur un matériau de Schneebeli, Calvetti et al. [33] montre que dans la plupart des cas la moyenne des rotations des grains est bien comparable à la rotation du matériau au niveau macroscopique. Il semble raisonnable de considérer la rotation moyenne des grains comme des microrotations r_{ij} étant le matériau modélisé comme un milieu continu [38]. Nous parlons ainsi de modèle de Cosserat de second gradient.

$$v_{ij} = r_{ij} = R_{ij} \quad (2.23)$$

$$w_{int}^* = \alpha_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 r_{ij}^*}{\partial x_k^2} \quad (2.24)$$

2.2.3 Les milieux continus de second gradient

Une hypothèse différente qui peut se faire sur la cinématique d'un milieu avec microstructure, est de supposer que le gradient de déformation macro $\partial u_i / \partial x_j$ est le même que la déformation micro v_{ij} .

$$v_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

Avec cette hypothèse le principe de travail virtuel pour un milieu avec microstructure avec second gradient se présente selon l'équation 2.26

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(t_i u_i^* + T_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) ds \quad (2.26)$$

t_i et T_{ij} ne peuvent pas être choisis de façon indépendante puisque u_i^* et $\partial u_i^* / \partial x_j$ ne sont pas indépendantes à cause des dérivées tangentielles le long de la frontière qui

dépendent de u_i^* .

En définissant q comme quantité scalaire il est possible de calculer les dérivées normales ($Dq = \partial q / \partial x_k n_k$) et les dérivées tangentielles ($D_j q = \partial q / \partial x_j - \partial q / \partial x_k n_k n_j$) afin d'écrire le travail virtuel intérieur et extérieur de manière que p_i et P_j puissent être indépendantes.

$$\boxed{\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* + \Sigma_{ijk} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \right) d\Omega = \int_{\Omega} p_i u_i^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} (p_i u_i^* + P_i D u_i^*) ds} \quad (2.27)$$

Comme pour le modèle classique il est possible d'intégrer deux fois l'équation 2.27 pour arriver à la formulation forte de l'équilibre 2.28 avec ses conditions aux limites 2.29.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \Sigma_{ijk}}{\partial x_j \partial x_k} + f_i = 0 \quad (2.28)$$

$$\sigma_{ij} n_i - n_k n_j D \Sigma_{ijk} - \frac{D \Sigma_{ijk}}{D x_k} n_j - \frac{D \Sigma_{ijk}}{D x_j} n_k - \frac{D n_l}{D n_l} \Sigma_{ijk} n_j n_k - \frac{D n_j}{D n_k} \Sigma_{ijk} = p_i \quad (2.29)$$

$$\Sigma_{ijk} n_j n_k = P_i \quad (2.30)$$

Modélisation des déformations localisées à l'aide des milieux continus second gradient

Plusieurs auteurs ont utilisé les milieux continus second gradient pour modéliser l'apparition des déformations localisées dans les géomatériaux. Cette approche permet d'obtenir des solutions numériques indépendantes du maillage grâce à l'introduction d'une longueur interne représentée par le paramètre constitutif de la loi de comportement second gradient.

Dans ce cadre il est possible d'en citer plusieurs. El Hassan, Caillerie et Chambon [59], [37] proposent une étude numérique et théorique sur une barre en traction. En envisageant une loi de comportement bilinéaire adoucissante pour la partie premier gradient et une loi élastique linéaire pour la partie second gradient, les auteurs trouvent analytiquement plusieurs solutions et les comparent avec des solutions numériques trouvées avec la méthode des éléments finis. El Hassan [59] montre aussi l'influence des conditions aux limites second gradient sur la solution de la barre.

Caillerie et al. [31] proposent des solutions analytiques sur un cylindre creux pour un milieu continu second gradient. Kotronis et al. [85] appliquent le milieu second gradient pour décrire le comportement du béton en utilisant pour le modèle d'endommagement celui de Mazars [97].

Matsushima dans [96] étend le travail de El Hassan pour un problème en déformations planes, en montrant comment l'utilisation d'un milieu enrichi second gradient peut régulariser la solution numérique d'un problème aux limites.

Besuelle [27] traite le problème de non unicité dans la modélisation d'un essai biaxial en prouvant que la régularisation du problème numérique ne peut pas restaurer l'unicité de

la solution. Sieffert et al. [127] étudient le problème de non unicité en mécanique pure sur un cylindre creux en envisageant différents discrétisations temporelles du problème. Fernandes et al. [63] proposent une version simplifiée des milieux avec second gradient en envisageant que la partie volumique du gradient de déformation. Il réduit de cette façon les nombres de degrés de liberté du problème en gardant l'introduction d'une longueur interne qui régularise le problème numérique. À différence de Matsushima [96], Fernandes propose aussi une formulation aux éléments finis en utilisant des éléments triangulaires.

La loi de comportement utilisée pour décrire le comportement de la partie second gradient est une loi élastique linéaire isotrope qui peut se déduire à partir d'un potentiel comme montré par Mindlin [105] (équation 2.31).

$$W = a_1 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_k} + a_2 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{ki}}{\partial x_k} + a_3 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_k} + a_4 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} + a_5 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{ji}}{\partial x_k} \quad (2.31)$$

Nous exprimons cette loi de comportement en considérant la dérivée de Jaumann pour les doubles contraintes afin d'avoir une dérivée objective en grandes déformations (équation 2.32). La même dérivée sera utilisée pour les contraintes de Cauchy dans le cadre d'un comportement élasto-plastique (chapitre 4).

$$\overset{\nabla}{\Sigma}_{ijk} = \dot{\Sigma}_{ijk} + \Sigma_{ijk} R_{li} + \Sigma_{imk} R_{mj} + \Sigma_{ijp} R_{pk} \quad (2.32)$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\nabla}{\Sigma}_{111} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{112} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{121} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{122} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{211} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{212} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{221} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{12345} & 0 & 0 & a^{23} & 0 & a^{12} & a^{12} & 0 \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ 0 & a^{145} & a^{145} & 0 & a^{25} & 0 & 0 & a^{12} \\ a^{23} & 0 & 0 & a^{34} & 0 & a^{25} & a^{25} & 0 \\ 0 & a^{25} & a^{25} & 0 & a^{34} & 0 & 0 & a^{23} \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ a^{12} & 0 & 0 & a^{25} & 0 & a^{145} & a^{145} & 0 \\ 0 & a^{12} & a^{12} & 0 & a^{23} & 0 & 0 & a^{12345} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \dot{v}_{11} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{11} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{12} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{12} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{21} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{21} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{22} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{22} / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Les paramètres constitutives de la relation matricielle 2.33 sont écrits en fonction des paramètres de l'équation du potentiel selon les relations des équations 2.34.

$$\begin{aligned} a^{12345} &= 2(a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5) \\ a^{23} &= a^2 + 2a^3 \\ a^{12} &= a^1 + a^2/2 \\ a^{145} &= a^1/2 + a^4 + a^5/2 \\ a^{25} &= a^2/2 + a^5 \\ a^{34} &= 2(a^3 + a^4) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les cinq paramètres de la loi élastique linéaire second gradient peuvent être réduits à deux puisque nous sommes intéressés à introduire une longueur interne pour une déformation de compression/extension (mode-I) et pour une déformation de cisaillement (mode-II). L'utilisation d'un milieu de type second gradient a pour objectif l'introduction d'une longueur interne donc les deux longueurs internes envisagées pour les deux modes de déformations peuvent être prises égaux. De cette façon l'équation 2.33 prend la forme de l'équation 2.35 qui sera prise en compte dans tous les calculs des parties III et IV.

$$\begin{bmatrix} \overset{\nabla}{\Sigma}_{111} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{112} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{121} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{122} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{211} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{212} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{221} \\ \overset{\nabla}{\Sigma}_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\ 0 & D/2 & D/2 & 0 & -D/2 & 0 & 0 & D/2 \\ 0 & D/2 & D/2 & 0 & -D/2 & 0 & 0 & D/2 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & -D/2 & -D/2 & 0 \\ 0 & -D/2 & -D/2 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ D/2 & 0 & 0 & -D/2 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\ D/2 & 0 & 0 & -D/2 & 0 & D/2 & D/2 & 0 \\ 0 & D/2 & D/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \dot{v}_{11} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{11} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{12} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{12} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{21} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{21} / \partial x_2 \\ \partial \dot{v}_{22} / \partial x_1 \\ \partial \dot{v}_{22} / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Une méthode d'identification est mis en place par Elmoustapha K. [60] afin de déterminer les paramètres d'une loi de comportement élasto-plastique y compris le paramètre du modèle second gradient D. La méthode d'identification s'appuie sur des essais expérimentaux menés dans un appareil triaxial vrai.

Il est possible de montrer que les milieux continus de type second gradient permettent d'introduire une longueur interne en faisant l'analyse dimensionnelle du travail virtuel interne.

$$w_{int}^* = \left[\frac{N}{L^2} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \left[\frac{N}{L^2} \right] [-] = \left[\frac{N}{L^2} \right] \\ \Sigma_{ijk} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} = \left[\frac{N}{L} \right] \left[\frac{1}{L} \right] \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Au niveau dimensionnelle donc le paramètre constitutif D de la loi second gradient a les dimensions d'une force (équation 2.38).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \left[\frac{N}{L^2} \right] = \left[\frac{N}{L^2} \right] [-] \quad (2.37)$$

$$\Sigma_{ijk} = D_{ijklmn} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j \partial x_k} \quad \left[\frac{N}{L} \right] = [N] \left[\frac{1}{L} \right] \quad (2.38)$$

En faisant le rapport entre les dimensions de la loi de comportement premier gradient et celle second gradient on voit bien que globalement nous avons introduit dans la formulation faible de l'équilibre une longueur interne (équation 2.39). Ce résultat est obtenu de façon analytique par Chambon et al. [37] dans une étude monodimensionnelle.

$$\frac{|D|}{|C|} = [L^2] \quad l_{int} = \sqrt{\frac{|D|}{|C|}} \quad (2.39)$$

Les avantages qui nous amènent à considérer la théorie des milieux second gradient se synthétisent comme suit :

1. L'équilibre reste bien formulé puisque l'enrichissement du milieu implique simplement une composante de plus au niveau du travail virtuel interne et externe. Une distinction claire entre la cinématique et la loi de comportement pour le milieu second gradient peut ainsi continuer d'exister.
2. Il est toujours possible de changer la loi de comportement classique sans modifier la partie second gradient puisqu'elle est indépendante de la loi de comportement pour la cinématique première gradient.
3. D'un point de vue numérique il est toujours possible de résoudre un problème aux limites avec un milieu second gradient en utilisant un algorithme de Newton-Raphson classique sans lui apporter aucune modification.

D'un point de vue numérique l'inconvénient le plus grand concerne le temps de calcul puisque la partie second gradient implique un nombre considérable d'inconnues de plus.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Résoudre l'équation 2.26 avec la méthode des éléments finis entraîne l'utilisation des éléments de type Hermitiens C^1 (éléments conformes) comme l'a fait El Hassan pour la solution d'un problème unidimensionnel [37]. Pour résoudre un problème bidimensionnel nous utilisons une méthode des multiplicateurs de Lagrange. Il est ainsi possible d'éviter l'utilisation des éléments C^1 qui, pour un problème bidimensionnel, impliquent des grandes restrictions.

Cette méthode consiste à envisager l'équation générale pour un milieu continu avec microstructure en ajoutant une condition cinématique pour les déformations mi-

crostructurales (équations 2.40).

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \lambda_{ij} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - v_{ij}^* \right) + \Sigma_{ijk} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k} \right] d\Omega = \int_{\Omega} g_i u_i^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} (p_i u_i^* + P_i D u_i^*) ds \\ \int_{\Omega} \lambda_{ij}^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - v_{ij} \right) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Équation de bilan du problème fluide

Pour résoudre un problème couplé il est nécessaire d'ajouter aux équations 2.40 l'équation de conservation de la masse fluide. Elle est écrite sous forme différentielle dans l'équation 2.41.

$$\dot{M} + \frac{\partial m_i}{\partial x_i} = Q \quad (2.41)$$

\dot{M} représente la variation de la masse fluide enfermée dans une masse donnée de squelette, m_i est le débit massique du fluide par unité de volume actuel, Q donne les sources massiques du fluide par unité de volume actuel.

Pour passer à la formulation faible nous multiplions l'équation 2.41 par un champ de pressions virtuelles p_w^* . En utilisant le théorème de la divergence nous obtenons l'équation de conservation de la masse fluide comme montrée dans l'équation 2.42 :

$$\int_{\Omega} \left(\dot{M} p_w^* - m_i \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} Q p_w^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} q p_w^* ds \quad (2.42)$$

$q = m_i n_i$ représente un flux supposé connu à la frontière. Collin et al. [45] ont utilisé cette formulation pour montrer des calculs sur un biaxial en régime de localisation. Le milieu poreux envisagé par Collin est utilisé dans le chapitre 5 pour résoudre un problème aux limites défini sur un cylindre creux.

Dans le chapitre suivant nous présentons les hypothèses qui définissent le milieu poreux considéré par Collin dans [45]. Dans la section 2.4 nous proposons la linéarisation des équations 2.40 et 2.42 qui nous permet de définir un problème aux éléments finis pour un milieu poreux avec second gradient. La méthode utilisée pour linéariser ces équations est la même que celle utilisée par Matsushima [96] pour un problème en mécanique pure.

2.3 Deux approches pour le comportement couplé

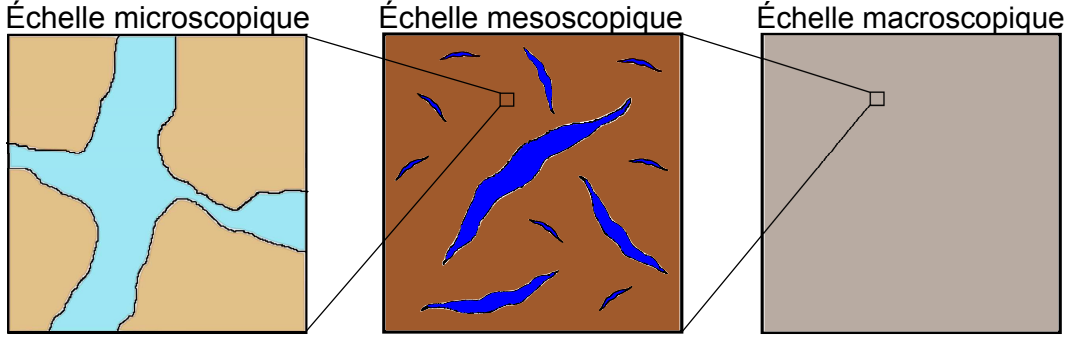
2.3.1 Échelles d'observations

Si nous analysons un matériau avec un microscope, nous observons les différentes structures qui le caractérisent selon l'échelle d'observation à laquelle nous décidons de regarder celui-ci. Selon le matériau qu'on veut étudier, différentes échelles d'observations peuvent être envisagées pour caractériser les structures ayant une influence significative sur le comportement du matériau.

Nous pouvons constater simplement que l'échelle d'observation à laquelle nous observons la microstructure d'un sable n'est pas la même pour une argile où, selon le phénomène considéré, plusieurs échelles d'observations peuvent être caractéristiques du matériau. Dans le cadre des géomatériaux comme les sols et les roches argileuses trois échelles d'observation peuvent toujours être considérées (figure 2.1).

- *Échelle d'observation microscopique :*
À cette échelle nous observons les différentes phases qui constituent le matériau. Pour une roche argileuse la phase solide est composée par des agrégats minéraux de silicium et aluminium caractérisés par une structure feuilletée (Coll [42]). Elle est caractérisée par une forme allongée et aplatie avec une dimension très variable. À cette échelle la phase fluide ne se présente pas libre mais fortement influencée par les forces électrostatiques des couches des minéraux qui forment la phase solide.
- *Échelle d'observation mésoscopique :*
Cette échelle d'observation est caractérisée par la matrice poreuse dans laquelle chaque point est composé par la microstructure décrite auparavant et par des fractures remplies d'eau.
- *Échelle d'observation macroscopique :*
À l'échelle macroscopique le matériau peut être considéré homogène étant donné que les discontinuités sont trop petites par rapport à la dimension caractéristique de cette échelle d'observation.

Le volume infinitésimal $d\Omega$ que nous utilisons dans les équations 2.60 pour résoudre un problème aux limites dans la réalité doit être de dimension finie. Nous parlerons donc du *Volume Élémentaire Représentatif* comme le volume de matière qui peut être considéré comme suffisamment représentatif du comportement du matériau. Pour cela il est nécessaire qu'il comprenne un nombre suffisamment grand de discontinuités et d'hétérogénéités. Nous indiquerons par H la dimension caractéristique du VER. De cette façon il est possible de définir une dimension caractéristique pour chaque échelle d'observation, d_{micro} pour l'échelle microscopique, d_{meso} pour l'échelle mésoscopique et d_{macro} pour l'échelle macroscopique.

FIGURE 2.1 – Échelles d’observation pour un milieu continu Ω

Il semble clair que le choix de la taille du VER est liée aussi à l’échelle d’observation à partir de laquelle on veut construire la loi de comportement de notre modèle. Dans la suite de cette thèse nous proposons deux approches différentes pour modéliser le comportement couplé des géomatériaux. Les deux approches sont résumées ci-dessous.

2.3.2 Approche classique ou phénoménologique

Dans ce cas nous choisissons comme VER un échantillon utilisé pour des essais en laboratoire à condition que sa dimension caractéristique H soit largement supérieure à celle de l’échelle mésoscopique (équation 2.43) comme montré en figure 2.2.

$$d_{macro} \gg H \gg d_{meso} \quad (2.43)$$

Nous étudions ainsi la réponse mécanique de l’échantillon en laboratoire (raideur et résistance) afin de déterminer les paramètres constitutifs qui caractérisent le comportement global du matériau. Ces paramètres seront utilisés dans une loi de comportement pour décrire la réponse mécanique d’un milieu continu équivalent qui représentera le matériau.

Il est donc clair que les paramètres calculés avec des essais de laboratoire incluront les effets des échelles d’observation mésoscopique et microscopique et la réponse mécanique de l’échantillon sera considérée comme représentative du matériau. Une loi de comportement utilisant la théorie de l’élasto-plasticité est envisagée pour résoudre le problème aux limites qui sera présenté dans le chapitre 5.

Caractérisation d’un milieu poreux

Comme présenté précédemment, dans une approche de type phénoménologique nous faisons l’hypothèse de modéliser un matériau comme un milieu poreux continu dont nous connaissons le comportement de chaque point matériel.

Ce milieu sera caractérisé par un mélange de deux phases, la phase solide et la phase fluide dont pour chacune nous connaissons le taux (figure 2.3). Nous pouvons définir

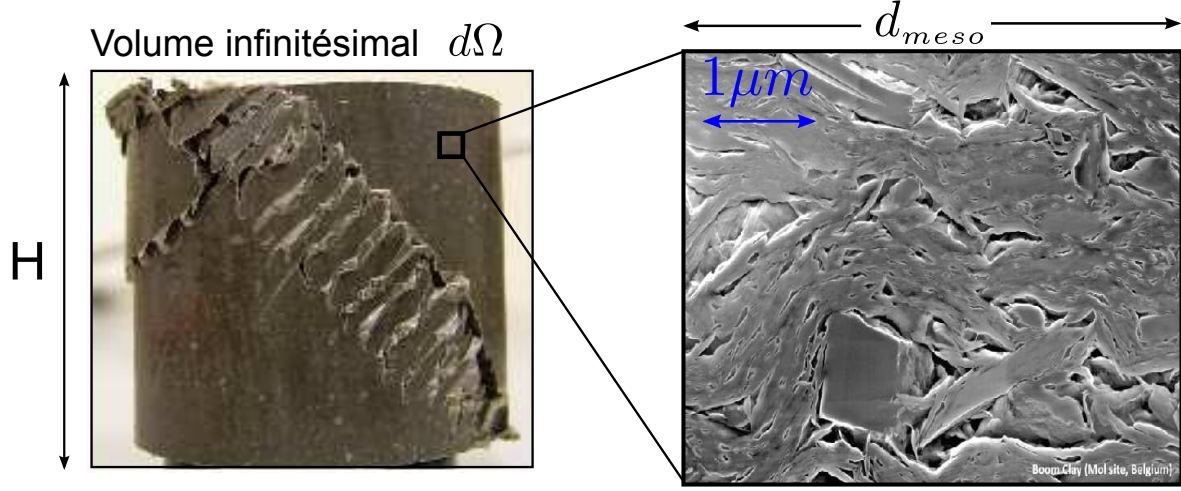


FIGURE 2.2 – Dimension caractéristique H du volume infinitésimal $d\Omega$ de la roche argileuse Boom Clay (l'image de la mésostructure est obtenue avec la technique BIB [133], [134])

la porosité ϕ^t comme le rapport entre le volume des parties fluides et le volume total.

$$\phi^t = \frac{\Omega^{t,w}}{\Omega^{t,mix}} \quad \phi^{t,s} = 1 - \phi^t = \frac{\Omega^{t,s}}{\Omega^{t,mix}} \quad (2.44)$$

Nous considérons que la phase solide est incompressible et donc caractérisée par une densité constante $\rho^{s,t} = \rho^s$. La phase fluide est considérée compressible avec une densité $\rho^{w,t}$. De cette façon nous pouvons définir la densité du mélange $\rho^{t,mix}$ selon l'équation 2.45 :

$$\rho^{t,mix} = \rho^s (1 - \phi^t) + \rho^{w,t} \phi^t \quad (2.45)$$

Le comportement de la phase fluide est caractérisé par l'équation 2.46 comme proposé dans [92]. Cela implique une augmentation de la densité en fonction de la pression d'eau.

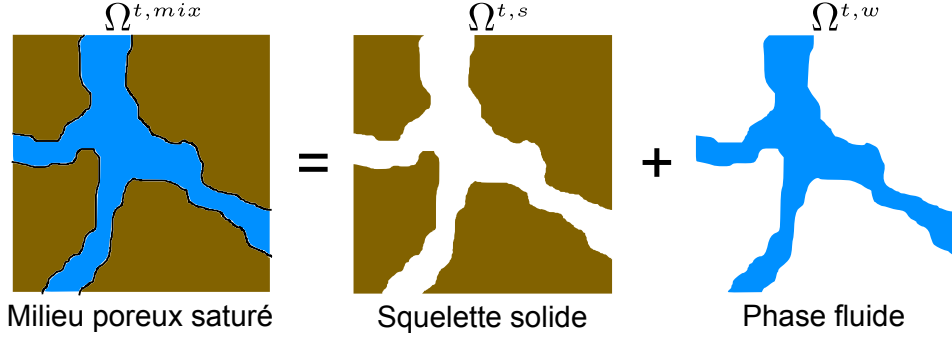
$$\dot{\rho}^{w,t} = \frac{\rho^{w,t}}{k_w} \dot{p}_w^t \quad (2.46)$$

Le paramètre k_w représente la rigidité volumique de la phase fluide. Le bilan de la masse est écrit à la fois pour la phase solide et pour la phase fluide. Le bilan de la masse solide est automatiquement satisfait puisque la configuration courante utilisée est définie à partir du mouvement du squelette solide. Cependant, il peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho^s (1 - \phi^t) \Omega^t] = 0 \quad (2.47)$$

En développant l'équation 2.47 nous obtenons une expression de $\dot{\phi}$ qui sera utilisée dans la définition de la variation de la masse fluide M (équation 2.48).

$$\dot{\phi}^t \Omega^t = (1 - \phi^t) \dot{\Omega}^t \quad (2.48)$$


 FIGURE 2.3 – Milieu poreux saturé Ω .

Pour que la phase fluide puisse être considérée en équilibre, elle doit satisfaire les équations de conservation de la quantité de mouvement du fluide. L'équation 2.49 est écrite sur la partie fluide du volume unitaire actuel du mélange; nous avons donc éliminé ϕ^t , présent partout.

$$\frac{\partial p_w^t}{\partial x_i^t} + F_i^{S/F,t} + \rho^{w,t} g_i = 0 \quad (2.49)$$

$F_i^{S/F,t}$ représente les efforts de frottement appliqués par le squelette solide sur le fluide. Le débit massique peut être écrit selon la formule suivante :

$$m_i^i = \rho^{w,t} \phi^t V_i^{F/S,t} \quad (2.50)$$

$V_i^{F/S,t}$ représente la vitesse relative du fluide par rapport au squelette dans la configuration déformée. On pourrait introduire la vitesse de Darcy du mélange comme $V_i = \phi^t V_i^{F/S,t}$.

La masse fluide présente dans la configuration déformée du milieu poreux peut s'écrire selon l'équation 2.51. L'expression de la variation temporelle de la quantité de masse fluide est reportée dans l'équation 2.52.

$$M^t = \rho^{w,t} \phi^t \Omega^t \quad (2.51)$$

$$\dot{M}^t = \dot{\rho}^{w,t} \phi^t \Omega^t + \rho^{w,t} \left[\dot{\phi}^t \Omega^t + \phi^t \dot{\Omega}^t \right] \quad (2.52)$$

En utilisant les équations 2.48 et 2.46, l'équation 2.52 peut se développer dans la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{M}^t &= \dot{\rho}^{w,t} \phi^t \Omega^t + \rho^{w,t} \dot{\Omega}^t = \\ &= \frac{\rho^{w,t} \dot{p}_w^t}{k_w} (\phi^t \Omega^t) + \rho^{w,t} \dot{\Omega}^t = \left[\frac{\dot{p}_w^t \phi^t}{k_w} + \frac{\dot{\Omega}^t}{\Omega^t} \right] \Omega^t \rho^{w,t} \end{aligned} \quad (2.53)$$

De cette façon la variation de masse fluide par unité de volume peut être définie comme suit :

$$\dot{M}^t = \left[\frac{\dot{p}_w^t \phi^t}{k_w} + \frac{\dot{\Omega}^t}{\Omega^t} \right] \rho^{w,t} \quad (2.54)$$

Nous utilisons des lois de comportement pour caractériser le comportement hydro-mécanique du milieu. Afin de pouvoir calculer la contrainte de Cauchy du mélange σ_{ij}^t nous utilisons le principe de Terzaghi pour lequel la contrainte $\sigma_{ij}^{t,t}$ dépend aussi de la pression d'eau p_w (équation 2.55).

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^{t,t} + p_w^t \delta_{ij} \quad (2.55)$$

La contrainte effective $\sigma_{ij}^{t,t}$ représente la contrainte du squelette solide en condition de milieu monophasé. Ce faisant nous décrivons le comportement du squelette solide utilisant des lois de comportement qui dépendent de l'histoire de la cinématique comme présenté dans la partie III.

En faisant l'hypothèse de flux en régime laminaire il est possible de montrer que les forces de frottement visqueux sont proportionnelles à la vitesse relative $V_i^{F/S,t}$ (équation 2.56).

$$F_i^{S/F,t} = \left[\frac{\rho^{w,t} \phi^t g}{K} \right] V_i^{S/F,t} \quad (2.56)$$

En substituant les équations sur la conservation de la quantité de mouvement fluide 2.49 dans l'équation 2.56 nous obtenons une expression de la vitesse relative $V_i^{F/S,t}$

$$V_i^{F/S,t} = -\frac{K}{\rho^{w,t} \phi^t g_i} \left(\frac{\partial p_w^t}{\partial x_i^t} + \rho^{w,t} g_i \right) \quad (2.57)$$

L'équation 2.57 et l'équation 2.50 nous permet de caractériser le débit de masse fluide selon la loi de Darcy.

$$m_i^t = -\frac{K}{g_i} \left(\frac{\partial p_w^t}{\partial x_i^t} + \rho^{w,t} g_i \right) = -\rho^{w,t} \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p_w^t}{\partial x_i^t} + \rho^{w,t} g_i \right) \quad (2.58)$$

Dans l'équation précédente K et k représentent la conductivité idrualique isotrope et la perméabilité intrinsèque du milieu poreux.

2.3.3 Approche multi-échelle

Dans le cas d'un approche multi-échelle nous ne faisons pas l'hypothèse d'un milieu continu équivalent mais nous y suivons un processus d'homogénéisation fait à partir de la microstructure du matériau.

Le VER dans ce cas sera représenté par le choix d'une microstructure suffisamment représentative du matériau. Cette microstructure pourra être choisie soit à l'échelle d'observation mésoscopique soit à l'échelle d'observation microscopique. Il est alors

nécessaire que, selon le choix opéré, la dimension caractéristique H du VER satisfasse les équations 2.59.a et 2.59.b.

$$d_{macro} \gg (H \equiv d_{meso}) \gg d_{micro} \quad \text{ou} \quad (H \equiv d_{micro}) \ll d_{macro} \quad (2.59)$$

Il est bien clair que dans l'approche multi-échelle le comportement phénoménologique du matériau sera une conséquence du choix de la microstructure et de sa caractérisation hydro-mécanique.

S'ils existent des techniques expérimentales de plus en plus développées pour représenter la microstructure du matériau à différents échelles (Viggiani et Hall [149]), ils n'existent pas de techniques expérimentales suffisamment précises qui puissent nous donner des informations sur le comportement mécanique de la microstructure. En raison de cet aspect, des hypothèses simplificatrices concernant les lois de comportement de la microstructure seront faites dans la partie IV où une méthode d'homogénéisation numérique (les éléments finis au carré) est étudiée.

Avec cette approche nous n'avons pas besoin de faire d'hypothèse pour calculer la contrainte du mélange. Il n'est donc pas nécessaire de calculer une contrainte effective au sens de Terzaghi ou de Biot.

2.4 Solution numérique du problème continu

Nous utilisons les équations d'équilibre du mélange et de la conservation de la masse fluide (équations 2.60) afin de pouvoir résoudre numériquement un problème aux limites avec *la méthode des éléments finis*.

Cette méthode permet de trouver des solutions numériques approximées où l'approximation est faite au niveau de la discrétisation de la géométrie et au niveau des fonctions inconnues. De cette façon nous passons d'un milieu composé par un nombre infini de points à un milieu discrétisé en éléments où chacun a un nombre fini de degrés de liberté. La solution trouvée peut donc se considérer comme une projection d'un espace de dimension infinie à un espace de dimension finie.

Pour décrire de façon objective des problèmes qui présentent des phénomènes de localisation nous considérons un milieu second gradient.

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \int_{\Omega^t} \left[\sigma_{ij}^t \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t} + \lambda_{ij}^t \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^t} - v_{ij}^* \right) + \Sigma_{ijk}^t \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^t} \right] d\Omega^t - W_{ext}^* = 0 \\ b. \int_{\Omega^t} \lambda_{ij}^* \left(\frac{\partial u_i^t}{\partial x_j^t} - v_{ij}^t \right) d\Omega^t = 0 \\ c. \int_{\Omega^t} \left(\dot{M}^t p_w^* - m_i^t \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i^t} \right) d\Omega^t - V_{ext}^* = 0 \end{array} \right. \quad (2.60)$$

Les travaux virtuels externes sont selon les équations 2.61.

$$\begin{aligned} W_{ext}^* &= \int_{\Omega^t} \rho^{mix,t} g_i u_i^* d\Omega^t + \int_{\partial\Omega^t} [p_i^t u_i^* + P_i D u_i^*] ds^t \\ V_{ext}^* &= \int_{\Omega^t} Q^t p_w^{*,t} d\Omega^t - \int_{\partial\Omega^t} q^t p_w^{*,t} ds^t \end{aligned} \quad (2.61)$$

Pour appliquer la méthode des éléments finis, il est nécessaire de discrétiser dans le temps et dans l'espace le problème envisagé. De cette façon nous arrivons à résoudre à travers un algorithme itératif de Newton-Raphson un système algébrique linéaire caractérisé par un nombre fini de degrés de liberté.

Les équations 2.60 présentent une forte non-linéarité en raison des lois de comportement envisagées (non-linéarité rhéologique) et à cause des déformations finies (non-linéarité géométrique). Il est donc nécessaire de récrire ces équations de façon linéarisée de manière à ce qu'elles puissent se résoudre à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson.

Dans la suite nous présentons brièvement l'algorithme de Newton-Raphson (section 2.4.1), la procédure mathématique abordée pour linéariser à la fois la non-linéarité des déformations finies (section 2.4.2) et celle rhéologique des lois de comportement (section

2.4.3) et, enfin, le passage d'un système d'équation continu à un système discret (section 2.4.4).

2.4.1 Algorithme de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson permet de résoudre un système d'équations non-linéaires à travers une procédure itérative. En considérant un système d'équations non-linéaires de i équations en j inconnues, nous allons trouver le vecteur x_j qui annule le système avec une méthode de Newton-Raphson. Pour cela nous envisageons un développement de Taylor au premier ordre, autour du vecteur x_j^n pour lequel le système ne s'annule pas ($F_i(x_j^n) \neq 0$).

$$F_i(x_j) = F_i(x_j^n) + \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{x_j=x_j^n} \Delta x_j \quad \text{avec} \quad \Delta x_j^n = (x_j - x_j^n) \quad (2.62)$$

De cette façon il est possible de calculer le vecteur Δx_j^n qui annule l'équation linéarisée du système non linéaire.

$$0 = F_i(x_j^n) + \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{x_j=x_j^n} \Delta x_j^n \quad \Rightarrow \quad \Delta x_j^n = - \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{x_j=x_j^n}^{-1} F_i(x_j^n) \quad (2.63)$$

En résolvant le système linéaire nous pouvons calculer une nouvelle estimation des coordonnées $x_j^{n+1} = x_j^n + \Delta x_j^n$ et itérer l'algorithme jusqu'au moment où la valeur résiduelle de $F_i(x_j^{n+1})$ est très proche de zéro.

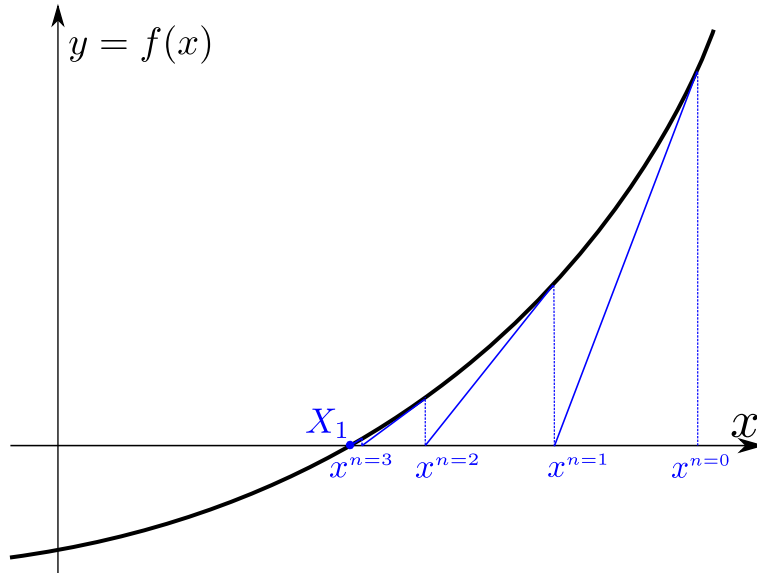


FIGURE 2.4 – Algorithme de Newton-Raphson pour une fonction à une variable $y=f(x)$.

La figure 2.4 montre le principe de la méthode quand l'équation n'a qu'une seule solution pour une fonction à une variable monotone. Si nous considérons une fonction

qui a plusieurs racines la solution trouvée dépend de l'initialisation de l'algorithme (section 2.5.1).

Dans le tableau 2.1 nous schématisons l'algorithme de Newton-Raphson utilisé pour résoudre un système d'équations non-linéaires. Il est utilisé avec la méthode des éléments finis pour résoudre les équations non-linéaires d'un milieu poreux saturé.

1. $x_j^n = x_j^0$	Initialisation
2. $R^n = -F(x_j^n)$	Calcul du résidu
3. $\left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j^n} \right]_{x_j=x_j^n}$	Calcul de la matrice Jacobienne
4. $\Delta x_j^n = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j^n} \right]_{x_j=x_j^n}^{-1} R_j^n$	Solution du système linéaire
5. $x_j^{n+1} = x_j^n + \Delta x_j^n$	Mis à jour de l'inconnue
6. $R^{n+1} = -F(x^{n+1})_j$	Mis à jour du résidu
7. Vérification du critère sur le résidu R^{n+1} et sur Δx_j^n	
(a) Le critère est satisfait : GO TO 8	
(b) Le critère n'est pas satisfait : n=n+1, GO TO 3	
8. Fin	

TABLE 2.1 – Algorithme de Newton-Raphson pour un système non-linéaire d'équations

2.4.2 Linéarisation de la formulation faible

Avant de montrer comment linéariser les équations d'équilibre et du bilan de la masse fluide, nous considérons une discrétisation temporelle définissant le temps comme $t = [t_1, t_2 \dots t_n \dots t_N]$ étant t_N le temps final du problème.

Nous considérons une configuration Ω^t qui est en équilibre avec les conditions aux limites. Nous voulons trouver une nouvelle configuration d'équilibre Ω^τ tel que $\tau = t + \Delta t$. En faisant l'hypothèse qu'il existe une configuration Ω^{τ^1} pour laquelle les équations 2.60 ne sont pas satisfaites, il est possible de définir les valeurs résiduelles R^{τ^1} , S^{τ^1} , W^{τ^1}

comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \int_{\Omega^{\tau_1}} \left[\sigma_{ij}^{\tau_1} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{\tau_1}} + \lambda_{ij}^{\tau_1} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{\tau_1}} - v_{ij}^* \right) + \Sigma_{ijk}^{\tau_1} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^{\tau_1}} \right] d\Omega^{\tau_1} - W_{ext}^{\tau_1} = R^{\tau_1} \\ b. \int_{\Omega^{\tau_1}} \lambda_{ij}^* \left(\frac{\partial u_i^{\tau_1}}{\partial x_j^{\tau_1}} - v_{ij}^{\tau_1} \right) d\Omega^{\tau_1} = S^{\tau_1} \\ c. \int_{\Omega^{\tau_1}} \left(\dot{M}^{\tau_1} p_w^* - m_i^{\tau_1} \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i^{\tau_1}} \right) d\Omega^{\tau_1} - V_{ext}^{*\tau_1} = W^{\tau_1} \end{array} \right. \quad (2.64)$$

De cette façon nous cherchons une configuration Ω^{τ_2} proche de Ω^{τ_1} pour laquelle les valeurs résiduelles R^{τ_1} , S^{τ_1} , W^{τ_1} peuvent se considérer nulles. Pour cette configuration les équations d'équilibre et de bilan de masse fluide peuvent se récrire selon les équations 2.65.

$$\left\{ \begin{array}{l} a. \int_{\Omega^{\tau_2}} \left[\sigma_{ij}^{\tau_2} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{\tau_2}} + \lambda_{ij}^{\tau_2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{\tau_2}} - v_{ij}^* \right) + \Sigma_{ijk}^{\tau_2} \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^{\tau_2}} \right] d\Omega^{\tau_2} - W_{ext}^{\tau_2} = 0 \\ b. \int_{\Omega^{\tau_2}} \lambda_{ij}^* \left(\frac{\partial u_i^{\tau_2}}{\partial x_j^{\tau_2}} - v_{ij}^{\tau_2} \right) d\Omega^{\tau_2} = 0 \\ c. \int_{\Omega^{\tau_2}} \left(\dot{M}^{\tau_2} p_w^* - m_i^{\tau_2} \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i^{\tau_2}} \right) d\Omega^{\tau_2} - V_{ext}^{*\tau_2} = 0 \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Afin d'obtenir un système linéaire auxiliaire, nous soustrayons les équations 2.64 aux équations 2.60 et récrivons cette différence dans la configuration Ω^{τ_1} . Nous détaillons les passages mathématiques qui mènent à la linéarisation dans les sections suivantes.

Équation d'équilibre

Nous décrivons la linéarisation de l'équation 2.60.a pour les équations d'équilibre. L'équation 2.66 représente la différence entre les équations 2.64 et 2.65 où les équations 2.65 sont écrites dans la configuration Ω^{τ_1} en faisant un changement des variables.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{\tau_1}} & \underbrace{\frac{\partial u_i^*}{\partial x_l^{\tau_1}} \left[\sigma_{ij}^{\tau_2} \frac{\partial x_l^{\tau_1}}{\partial x_j^{\tau_2}} \det F - \sigma_{il}^{\tau_1} \right]}_A + \underbrace{\frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_l^{\tau_1}} \left[\Sigma_{ijk}^{\tau_2} \frac{\partial x_l^{\tau_1}}{\partial x_k^{\tau_2}} \det F + \Sigma_{ijl}^{\tau_1} \right]}_B + \\ & - \underbrace{\frac{\partial u_i^*}{\partial x_l^{\tau_1}} \left[\lambda_{ij}^{\tau_2} \frac{\partial x_l^{\tau_1}}{\partial x_j^{\tau_2}} \det F - \lambda_{il}^{\tau_1} \right]}_C + \underbrace{v_{ij}^* [\lambda_{ij}^{\tau_2} \det F - \lambda_{ij}^{\tau_1}]}_D + \\ & - \underbrace{u_i^* [\rho^{mix, \tau_2} \det F - \rho^{mix, \tau_1}] g_i}_{E} d\Omega^{\tau_1} = -R^{\tau_1} \quad (2.66) \end{aligned}$$

Nous rappelons que F_{ij} et $d\Omega^{\tau^2}$ sont définies comme suit :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i^{\tau^2}}{\partial x_j^{\tau^1}} \quad d\Omega^{\tau^2} = \det F \, d\Omega^{\tau^1}$$

En introduisant les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{\tau^2} - \sigma_{ij}^{\tau^1} & du_i &= x_i^{\tau^2} - x_i^{\tau^1} \\ d\Sigma_{ijk} &= \Sigma_{ijk}^{\tau^2} - \Sigma_{ijk}^{\tau^1} & dv_{ij} &= v_{ij}^{\tau^2} - v_{ij}^{\tau^1} \\ d\rho^{mix} &= \rho^{mix, \tau^2} - \rho^{mix, \tau^1} & d\lambda_{ij} &= \lambda_{ij}^{\tau^2} - \lambda_{ij}^{\tau^1} \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \det F &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_1^{\tau^2}}{\partial x_i^{\tau^1}} \frac{\partial x_2^{\tau^2}}{\partial x_j^{\tau^1}} \frac{\partial x_3^{\tau^2}}{\partial x_k^{\tau^1}} = \\ &= \epsilon_{ijk} \left[\delta_{1i} + \frac{\partial du_1^{\tau^1}}{\partial x_i^{\tau^1}} \right] \left[\delta_{2j} + \frac{\partial du_2^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} \right] \left[\delta_{3k} + \frac{\partial du_3^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] \simeq 1 + \frac{\partial du_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

ϵ_{ijk} représente le symbole the Levi-Civita utilisé pour écrire le produit vectoriel en notation indicielle. Étant donné que la configuration Ω^{τ^1} est connue, nous pouvons écrire le gradient de transformation $\partial x_i^{\tau^1} / \partial x_j^{\tau^2}$ selon l'équation 2.69.

$$\frac{\partial x_i^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^2}} = \left[\frac{\partial x_j^{\tau^2}}{\partial x_i^{\tau^1}} \right]^{-1} \simeq \left[\delta_{ij} + \frac{\partial du_i^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} + O(du_i^{\tau^1}) + \dots \right]^{-1} \simeq \delta_{ij} - \frac{\partial du_i^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} + O(du_i^{\tau^1}) + \dots \quad (2.69)$$

En substituant ces quantités dans l'équation 2.66 nous obtenons l'expression linéarisée de l'équation 2.60.a.

$$A : \int_{\Omega^{\tau^1}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_l} \left[d\sigma_{il}^{\tau^1} - \sigma_{ik}^{\tau^1} \frac{\partial du_l^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} + \sigma_{il}^{\tau^1} \frac{\partial du_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.70)$$

$$B : \int_{\Omega^{\tau^1}} \frac{\partial v_{ik}^*}{\partial x_l} \left[d\Sigma_{ikl}^{\tau^1} - \Sigma_{ikl}^{\tau^1} \frac{\partial du_l^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} + \Sigma_{ikl}^{\tau^1} \frac{\partial du_h^{\tau^1}}{\partial x_h^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.71)$$

$$C : \int_{\Omega^{\tau^1}} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_l} \left[d\lambda_{il}^{\tau^1} - \lambda_{ik}^{\tau^1} \frac{\partial du_l^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} + \lambda_{il}^{\tau^1} \frac{\partial du_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.72)$$

$$D : \int_{\Omega^{\tau^1}} v_{il}^* \left[d\lambda_{il}^{\tau^1} + \lambda_{il}^{\tau^1} \frac{\partial du_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.73)$$

$$E : \int_{\Omega^{\tau^1}} u_i^* \left[d\rho^{mix, \tau^1} - \rho^{mix, \tau^1} \frac{\partial du_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] g_i d\Omega^{\tau^1} \quad (2.74)$$

Pour terminer le calcul du système auxiliaire linéaire pour les équations précédentes, nous allons introduire des lois de comportement pour l'increment de la contrainte de Cauchy $d\sigma_{il}$ et la double contrainte $d\Sigma_{il}$.

Équations sur les multiplicateur de Lagrange

Nous répétons les mêmes passages mathématiques pour les équations concernant le multiplicateur de Lagrange (équations 2.60.b).

$$\int_{\Omega^{\tau^1}} \underbrace{\lambda_{ij}^* \left(\frac{\partial u_i^{\tau^2}}{\partial x_k^{\tau^1}} \frac{\partial x_k^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^2}} \det F - \frac{\partial u_i}{\partial x_j^{\tau^1}} \right)}_A - \underbrace{\lambda_{ij}^* (v_{ij}^{\tau^2} \det F - v_{ij}^{\tau^1})}_{B} d\Omega^{\tau^1} = -S^{\tau^1} \quad (2.75)$$

En considérant les équations 2.67, 2.68 et 2.69 nous obtenons les équations suivantes :

$$A : \int_{\Omega^{\tau^1}} \lambda_{ij}^* \left[\frac{\partial d u_i^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} + \frac{\partial u_i^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \frac{\partial d u_k^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} - \frac{\partial u_i^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \frac{\partial d u_k^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.76)$$

$$B : \int_{\Omega^{\tau^1}} \lambda_{ij}^* \left[d v_{ij}^{\tau^1} + v_{ij}^{\tau^1} \frac{\partial d u_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.77)$$

Équation du bilan fluide

En suivant la même méthode pour l'équation de bilan fluide nous obtenons les équations 2.81 et 2.82 :

$$\int_{\Omega^{\tau^1}} \underbrace{p_w^* (\dot{M}^{\tau^2} \det F - \dot{M}^{\tau^1})}_A - \underbrace{\frac{\partial p_w^*}{\partial x_i} \left(m_j^{\tau^2} \frac{\partial x_i^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^2}} \det F - m_i^{\tau^1} \right)}_B d\Omega^{\tau^1} = -W^{\tau^1} \quad (2.78)$$

$$d\dot{M}^{\tau^1} = \dot{M}^{\tau^2} - \dot{M}^{\tau^1} \quad (2.79)$$

$$d m_i^{\tau^1} = m_i^{\tau^2} - m_i^{\tau^1} \quad (2.80)$$

$$A : \int_{\Omega^{\tau^1}} p_w^* \left[d\dot{M}^{\tau^1} + \dot{M}^{\tau^1} \frac{\partial d u_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.81)$$

$$B : \int_{\Omega^{\tau^1}} \frac{\partial p_w^*}{\partial x_i} \left[d m_i^{\tau^1} - m_j^{\tau^1} \frac{\partial d u_i^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} + m_i^{\tau^1} \frac{\partial d u_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \right] d\Omega^{\tau^1} \quad (2.82)$$

La Matrice tangente du problème linéarisé

L'introduction d'une relation entre la cinématique et les variables conjuguées en contrainte permet de récrire les équations linéarisées du principe de travail virtuel présentées précédemment uniquement en fonction des degrés de liberté en déplacement. De cette façon l'équation 2.60 peut se récrire avec l'équation 2.83.

$$\int_{\Omega^{\tau^1}} [U_{(x,y)}^{*,\tau^1}]_{(1x25)}^\top [E_{(x,y)}^{\tau^1}]_{(25x25)} [dU_{(x,y)}^{\tau^1}]_{(25x1)} d\Omega^{\tau^1} = -R^{*,\tau^1} - S^{*,\tau^1} - W^{*,\tau^1} \quad (2.83)$$

$dU_{(x,y)_i}^{\tau 1}$ représente le vecteur des incréments des degrés de liberté du problème continu défini selon l'équation suivante :

$$\begin{aligned} [dU_{(x,y)_i}^{\tau 1}]_i = & \left[\frac{\partial du_1^{\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial du_1^{\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \frac{\partial du_2^{\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial du_2^{\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} du_1^{\tau 1} du_2^{\tau 1} \frac{\partial dp_w^{\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial dp_w^{\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} dp_w^{\tau 1} \frac{\partial dv_{11}^{\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial dv_{11}^{\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \right. \\ & \left. \frac{\partial dv_{12}^{\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial dv_{12}^{\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \frac{\partial dv_{21}^{\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial dv_{21}^{\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \frac{\partial dv_{22}^{\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial dv_{22}^{\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} dv_{11}^{\tau 1} dv_{12}^{\tau 1} dv_{21}^{\tau 1} dv_{22}^{\tau 1} d\lambda_{11}^{\tau 1} d\lambda_{12}^{\tau 1} d\lambda_{21}^{\tau 1} d\lambda_{22}^{\tau 1} \right] \end{aligned}$$

De la même manière le vecteur $U_{(x,y)_i}^{\tau 1,*}$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned} [U_{(x,y)_i}^{\tau 1,*}]_i = & \left[\frac{\partial u_1^{*,\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial u_1^{*,\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \frac{\partial u_2^{*,\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial u_2^{*,\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} u_1^{*,\tau 1} u_2^{*,\tau 1} \frac{\partial p_w^{*,\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial p_w^{*,\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} p_w^{*,\tau 1} \frac{\partial v_{11}^{*,\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial v_{11}^{*,\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \right. \\ & \left. \frac{\partial v_{12}^{*,\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial v_{12}^{*,\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \frac{\partial v_{21}^{*,\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial v_{21}^{*,\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} \frac{\partial v_{22}^{*,\tau 1}}{\partial x_1^{\tau 1}} \frac{\partial v_{22}^{*,\tau 1}}{\partial x_2^{\tau 1}} v_{11}^{*,\tau 1} v_{12}^{*,\tau 1} v_{21}^{*,\tau 1} v_{22}^{*,\tau 1} \lambda_{11}^{*,\tau 1} \lambda_{12}^{*,\tau 1} \lambda_{21}^{*,\tau 1} \lambda_{22}^{*,\tau 1} \right] \end{aligned}$$

En figure 2.5 nous montrons l'expression générale de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$. En faisant l'hypothèse de prendre $U_{(x,y)_i}^{\tau 1,*} = 1$ et $dU_{(x,y)_i}^{\tau 1} = 1$ nous pouvons interpréter les blocs de la matrice tangente comme le travail virtuel interne entre les incréments des contraintes et les degrés de liberté virtuels. Chaque bloc est défini ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{ccc} E1_{(4 \times 4)}^{\tau 1} & 0_{(4 \times 2)} & K_{WM}^{\tau 1}_{(4 \times 3)} \\ G1_{(2 \times 4)}^{\tau 1} & 0_{(2 \times 2)} & G2_{(2 \times 3)}^{\tau 1} \\ K_{MW}^{\tau 1}_{(3 \times 4)} & 0_{(3 \times 2)} & K_{WW}^{\tau 1}_{(3 \times 3)} \end{array} & \begin{array}{cc} 0_{(4 \times 8)} & 0_{(4 \times 4)} \\ 0_{(2 \times 8)} & 0_{(2 \times 4)} \\ 0_{(3 \times 8)} & 0_{(3 \times 4)} \end{array} & \begin{array}{c} -I_{(4 \times 4)} \\ 0_{(2 \times 4)} \\ 0_{(3 \times 4)} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} E2_{(8 \times 4)}^{\tau 1} & 0_{(8 \times 2)} & 0_{(8 \times 3)} \\ E3_{(4 \times 4)}^{\tau 1} & 0_{(4 \times 2)} & 0_{(4 \times 3)} \\ E4_{(4 \times 4)}^{\tau 1} & 0_{(4 \times 2)} & 0_{(4 \times 3)} \end{array} & \begin{array}{cc} D_{(8 \times 8)}^{\tau 1} & 0_{(8 \times 4)} \\ 0_{(4 \times 8)} & 0_{(4 \times 4)} \\ 0_{(4 \times 8)} & -I_{(4 \times 4)} \end{array} & \begin{array}{c} 0_{(8 \times 4)} \\ I_{(4 \times 4)} \\ 0_{(4 \times 4)} \end{array} \end{bmatrix}$$

FIGURE 2.5 – Matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{(25 \times 25)}$ du problème continu linéarisé, [45].

- *Bloc bleu ciel.* Cette partie de la matrice de rigidité exprime le comportement hydromécanique du milieu et elle est strictement dépendant de la loi de comportement que nous utilisons. Nous allons montrer dans la section 2.4.3 deux expressions possibles selon les deux approches différentes utilisées pour définir une loi de comportement. La seule partie de la matrice $[E1^{\tau 1}]$ qui peut s'écrire analytiquement est celle due aux équations 2.70 (deuxième et troisième terme) et

aux équations 2.72 (deuxième et troisième termes) :

$$[E1^{\tau^1}] = [C^{\tau^1}] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sigma_{12}^{\tau^1} + \lambda_{12}^{\tau^1} & \sigma_{11} - \lambda_{11} \\ \sigma_{12}^{\tau^1} - \lambda_{12}^{\tau^1} & -\sigma_{11}^{\tau^1} + \lambda_{11}^{\tau^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_{22}^{\tau^1} + \lambda_{22}^{\tau^1} & \sigma_{21}^{\tau^1} - \lambda_{21}^{\tau^1} \\ \sigma_{22}^{\tau^1} - \lambda_{22}^{\tau^1} & -\sigma_{21}^{\tau^1} + \lambda_{21}^{\tau^1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Le matrice $[C^{\tau^1}]$ représente la tangente consistante due au comportement mécanique du milieu.

- *Bloc verte* : Il représente le comportement des doubles contraintes qui caractérisent la cinématique second gradient du milieu enrichi. Ce bloc est calculé à partir du premier terme des équations 2.71.
- *Bloc rouge*. Il est composé par les sous-matrices $E2^{\tau^1}$ et $E3^{\tau^1}$ qui peuvent être déduites par l'équation 2.71 (deuxième et troisième terme) et par l'équation 2.73 (deuxième terme). Les équations 2.85.a et 2.85.b montrent les deux sous-matrices.

$$[E2^{\tau^1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Sigma_{112}^{\tau^1} & +\Sigma_{111}^{\tau^1} \\ +\Sigma_{112}^{\tau^1} & -\Sigma_{111}^{\tau^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_{122}^{\tau^1} & +\Sigma_{121}^{\tau^1} \\ +\Sigma_{122}^{\tau^1} & -\Sigma_{121}^{\tau^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_{212}^{\tau^1} & +\Sigma_{211}^{\tau^1} \\ +\Sigma_{212}^{\tau^1} & -\Sigma_{211}^{\tau^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma_{222}^{\tau^1} & +\Sigma_{221}^{\tau^1} \\ +\Sigma_{222}^{\tau^1} & -\Sigma_{221}^{\tau^1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [E3^{\tau^1}] = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{\tau^1} & 0 & 0 & \lambda_{11}^{\tau^1} \\ \lambda_{12}^{\tau^1} & 0 & 0 & \lambda_{12}^{\tau^1} \\ \lambda_{21}^{\tau^1} & 0 & 0 & \lambda_{21}^{\tau^1} \\ \lambda_{22}^{\tau^1} & 0 & 0 & \lambda_{22}^{\tau^1} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

- *Bloc jaune* : Le bloc jaune peut se calculer à partir de l'équation 2.76 et des équations 2.77 (deuxième terme). L'expression de la sous-matrice $[E4^{\tau^1}]$ est la suivante :

$$[E4^{\tau^1}] = \begin{bmatrix} 1 - v_{11}^{\tau^1} & \frac{\partial u_1^{\tau^1}}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u_1^{\tau^1}}{\partial x_1} - v_{11}^{\tau^1} \\ \frac{\partial u_1^{\tau^1}}{\partial x_2} - v_{12}^{\tau^1} & 1 & \frac{\partial u_1^{\tau^1}}{\partial x_1} & v_{12}^{\tau^1} \\ -v_{21}^{\tau^1} & \frac{\partial u_2^{\tau^1}}{\partial x_2} & 1 & \frac{\partial u_2^{\tau^1}}{\partial x_1} - v_{21}^{\tau^1} \\ \frac{\partial u_2^{\tau^1}}{\partial x_2} - v_{22}^{\tau^1} & 0 & -\frac{\partial u_2^{\tau^1}}{\partial x_1} & 1 - v_{22}^{\tau^1} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

- *Bloc marron* : Le bloc marron représente la premier composante de l'équation 2.72. La matrice $I_{4 \times 4}$ est une matrice identité ($I_{4 \times 4} = \delta_{ij}$).
- *Blocs violets* : Ces blocs sont calculés à partir des équations 2.73 (premier terme) et des équations 2.77 (premier terme).
- *Bloc gris* : Composantes nulles de la matrice tangente.

Le bloc bleu ciel représente la contribution du milieu poreux au système linéaire auxiliaire. Afin de caractériser cette partie de la matrice $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$ il est nécessaire d'utiliser des lois constitutives pour décrire le comportement couplé du milieu. Dans la section 2.4.3 nous présentons deux façons de calculer le bloc bleu ciel du système linéaire auxiliaire pour les deux approches de comportement décrites dans la section 2.3.

2.4.3 Linéarisation des lois de comportement

En utilisant les deux approches différentes pour décrire une loi de comportement nous allons caractériser le bloc bleu ciel de la matrice $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$ présenté dans la section précédente. Il est donc nécessaire d'écrire des relations entre les degrés de déplacement $dU_{(x,y)_i}^{\tau 1}$ et ses variables conjuguées $d\sigma_i$, $d\Sigma_i$, $d\rho^{mix}$, dm_i et dM .

Dans le premier cas (approche phénoménologique) nous décrivons le milieu avec des variables d'état ce qui nous permet de développer de façon analytique les sous matrices $K_{WM(4x3)}^{\tau 1}$, $K_{MW(3x4)}^{\tau 1}$, $K_{WW(3x3)}^{\tau 1}$, $G1_{(2x4)}^{\tau 1}$ et $G2_{(2x3)}^{\tau 1}$.

Dans le deuxième cas (approche multi-échelle), en définissant la loi de comportement à l'aide d'un processus d'homogénéisation numérique nous pourrions calculer de façon numérique chaque composante du bloc bleu ciel de la matrice $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$. Selon les hypothèses faites sur les composantes du milieu à l'échelle microscopique, certaines sous-matrices seront proches de zéro alors que d'autres auront une valeur non-nulle. Les phénomènes de couplage auront lieu selon la caractérisation de la microstructure du milieu.

Approche classique

Les équations d'équilibre sont écrites en fonction de la contrainte σ_{ij} qui représente la contrainte du mélange du milieu poreux. Nous utilisons *le principe de Terzaghi* pour décrire cette contrainte en définissant la *contrainte effective* au sens de Terzaghi σ'_{ij} . Elle peut se considérer caractéristique du comportement mécanique du squelette solide du milieu poreux.

$$d\sigma_{ij} = d\sigma'_{ij} + dp_w \delta_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \nabla du_{kl} + dp_w \delta_{ij} \quad (2.87)$$

Dans la troisième partie de cette thèse, partie III, nous allons utiliser une loi de comportement élasto-plastique adoucissante pour décrire le comportement du squelette solide.

De cette façon les sous-matrices $C^{\tau 1}$ et $K_{WM}^{\tau 1}$ peuvent s'écrire comme suit :

$$[C^{\tau 1}] = \begin{bmatrix} C_{xxxx}^{\tau 1} & C_{xxxy}^{\tau 1} & C_{xxyx}^{\tau 1} & C_{xxyy}^{\tau 1} \\ C_{xyxx}^{\tau 1} & C_{xyxy}^{\tau 1} & C_{xyyx}^{\tau 1} & C_{xyyy}^{\tau 1} \\ C_{yxxx}^{\tau 1} & C_{yxyx}^{\tau 1} & C_{yxyx}^{\tau 1} & C_{yxyy}^{\tau 1} \\ C_{yyxx}^{\tau 1} & C_{yyxy}^{\tau 1} & C_{yyyx}^{\tau 1} & C_{yyyy}^{\tau 1} \end{bmatrix} \quad [K_{WM}^{\tau 1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

En linéarisant la densité du mélange nous obtenons l'équation 2.89.

$$d\rho^{mix,\tau^1} = d\rho^{w,\tau^1}\phi^{\tau^1} + d\phi^{\tau^1}\rho^{w,\tau^1} - \rho^s d\phi^{\tau^1} \quad (2.89)$$

$$d\rho_w^{\tau^1} = \frac{\rho_w^{\tau^1}}{k_w} dp_w^{\tau^1} \quad d\phi^{\tau^1} = (1 - \phi^{\tau^1}) \frac{d\Omega^{\tau^1}}{\Omega^{\tau^1}} = (1 - \phi^{\tau^1}) \frac{\partial du_k^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \quad (2.90)$$

En substituant les équations 2.90.a, 2.90.b dans l'équation 2.89 nous obtenons l'expression linéarisée de la densité du mélange (équations 2.91).

$$d\rho^{mix,\tau^1} = \frac{\rho_w^{\tau^1}\phi^{\tau^1}}{k_w} dp_w^{\tau^1} + \left[\rho_s^{\tau^1} - \rho_w^{\tau^1} \right] \left[1 - \phi^{\tau^1} \right] \frac{\partial du_k^t}{\partial x_k^{\tau^1}} \quad (2.91)$$

Il est possible d'écrire toutes les composantes des sous-matrices $G1^{\tau^1}$ et $G2^{\tau^1}$ en substituant l'équation 2.91 dans l'équation 2.74.

$$\begin{aligned} [G1^{\tau^1}] &= \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & B \\ B & 0 & 0 & B \end{bmatrix} \\ B &= (\rho^s - \rho^{w,\tau^1})(1 - \phi^{\tau^1}) - \rho^{mix,\tau^1} \end{aligned} \quad [G2^{\tau^1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho^{w,\tau^1} \frac{\phi^{\tau^1}}{k_w} g_1 \\ 0 & 0 & -\rho^{w,\tau^1} \frac{\phi^{\tau^1}}{k_w} g_2 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

En utilisant les équations 2.52 et 2.58 nous proposons une expression pour le flux massique m_i et la variation de quantité de la masse fluide.

$$\begin{aligned} dm_i &= -d\rho^{w,\tau^1} \left[\frac{\partial p_w^{\tau^1}}{\partial x_i^{\tau^1}} + \rho^{w,\tau^1} g \right] \frac{k}{\mu} - \left[\frac{\partial dp_w^{\tau^1}}{\partial x_i^{\tau^1}} + d\rho^{w,\tau^1} g \right] \frac{k}{\mu} \rho^{w,\tau^1} + \frac{\partial du_i}{\partial x_j} \frac{\partial p_w}{\partial x_j} \frac{k}{\mu} \rho^{w,t} = \\ &= -\frac{\rho^{w,t} dp_w^t}{k_w} \left[\frac{\partial p_w}{\partial x_i} + \rho^{w,t} g \right] \frac{k}{\mu} - \left[\frac{\partial dp_w}{\partial x_i} + \frac{\rho^{w,t} dp_w^t}{k_w} g \right] \frac{k}{\mu} \rho^{w,t} + \frac{\partial du_i}{\partial x_j} \frac{\partial p_w}{\partial x_j} \frac{k}{\mu} \rho^{w,t} \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} d\dot{M} &= d \left[\rho^{w,t} \left(\frac{p_w^t \phi^t}{k_w} + \frac{\dot{\Omega}^t}{\Omega^t} \right) \right] = \\ &= d\rho^{w,t} \left[\frac{\dot{p}_w^t \phi^t}{k_w} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] + \rho^{w,t} \left[\frac{dp_w^t \phi^t}{k_w} + \frac{p_w^t d\phi^t}{k_w} \right] + \rho^{w,t} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\dot{\Omega}^t}{\Omega^t} \right] \frac{\partial du_k}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\rho^{w,t} dp_w^t}{k_w} \left[\frac{\dot{p}_w^t \phi^t}{k_w} + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right] + \rho^{w,t} \left[\frac{dp_w^t \phi^t}{\Delta t k_w} + \frac{p_w^t}{k_w} (1 - \phi^t) \frac{\partial du_k}{\partial x_k} \right] + \rho^{w,t} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\dot{\Omega}^t}{\Omega^t} \right] \frac{\partial du_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Les sous-matrices K_{MW} et K_{WW} peuvent s'écrire selon les équations 2.95 et 2.97 :

$$[K_{MW}^{\tau^1}] = \begin{bmatrix} -\rho^{w,t} \frac{\partial p_w^t}{\partial x_1} \frac{k}{\mu} & m_2^t & -\rho^{w,t} \frac{\partial p_w^t}{\partial x_1} \frac{k}{\mu} & -m_1^t \\ -m_2^t & -\rho^{w,t} \frac{\partial p_w^t}{\partial x_1} \frac{k}{\mu} & m_1^t & -\rho^{w,t} \frac{\partial p_w^t}{\partial x_2} \frac{k}{\mu} \\ A + \dot{M}^t & 0 & 0 & A + \dot{M}^t \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

A est écrit selon l'expression suivante :

$$A = \rho^{w,t} \left(\dot{p}_w \frac{1 - \phi^t}{k_w} + \frac{1}{\Delta t} - \frac{\dot{\Omega}^t}{\Omega^t} \right) \quad (2.96)$$

$$[K_{WW}^{\tau 1}] = \begin{bmatrix} -\rho^{w,\tau 1} \frac{k}{\mu} & 0 & \frac{\rho^{w,\tau 1} k}{k_w \mu} \left(\frac{\partial p_w^{w,\tau 1}}{\partial x_i^{\tau 1}} + 2\rho^{\tau 1} g_1 \right) \\ 0 & -\rho^{w,\tau 1} \frac{k}{\mu} & \frac{\rho^{w,\tau 1} k}{k_w \mu} \left(\frac{\partial p_w^{w,\tau 1}}{\partial x_i^{\tau 1}} + 2\rho^{\tau 1} g_2 \right) \\ 0 & 0 & \frac{\rho^{w,\tau 1} \phi^{\tau 1}}{k_w k_w} \dot{p}_w^{\tau 1} + \frac{\rho^{w,\tau 1} \phi^{\tau 1}}{k_w \Delta t} + \frac{\rho^{w,\tau 1} \dot{\Omega}^{\tau 1}}{k_w \Omega^{\tau 1}} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Il est important de remarquer que le bloc bleu ciel de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$ présente des composantes nulles et des composantes égales entre elles comme montré en figure 2.6. Les composantes non nulles représentent les termes de couplage entre la partie mécanique et la partie hydraulique du milieu poreux. Ils sont la conséquence des hypothèses que nous avons faites sur la physique qui caractérise le milieu poreux. Cette matrice aurait eu des composantes différentes si, par exemple, la contrainte totale avait été calculée avec des contraintes effectives au sens de Biot ou si on avait considéré la phase solide compressible.

$E1_{11}^{\tau 1}$	$E1_{12}^{\tau 1}$	$E1_{13}^{\tau 1}$	$E1_{14}^{\tau 1}$	0	0	0	0	-1
$E1_{21}^{\tau 1}$	$E1_{22}^{\tau 1}$	$E1_{23}^{\tau 1}$	$E1_{24}^{\tau 1}$	0	0	0	0	0
$E1_{31}^{\tau 1}$	$E1_{32}^{\tau 1}$	$E1_{33}^{\tau 1}$	$E1_{34}^{\tau 1}$	0	0	0	0	0
$E1_{41}^{\tau 1}$	$E1_{42}^{\tau 1}$	$E1_{43}^{\tau 1}$	$E1_{44}^{\tau 1}$	0	0	0	0	-1
B	0	0	B	0	0	0	0	0
B	0	0	B	0	0	0	0	$G2_{23}^{\tau 1}$
$K_{MW11}^{\tau 1}$	$K_{MW12}^{\tau 1}$	$K_{MW13}^{\tau 1}$	$-K_{MW23}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WW11}^{\tau 1}$	0	$K_{WW13}^{\tau 1}$
$-K_{MW12}^{\tau 1}$	$K_{MW22}^{\tau 1}$	$K_{MW23}^{\tau 1}$	$K_{MW22}^{\tau 1}$	0	0	0	$K_{WW11}^{\tau 1}$	$K_{WW23}^{\tau 1}$
$K_{MW31}^{\tau 1}$	0	0	$K_{MW31}^{\tau 1}$	0	0	0	0	$K_{WW33}^{\tau 1}$

FIGURE 2.6 – Bloc bleu ciel de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$

Approche multi-échelle

Dans la quatrième partie, IV, nous présentons une méthode d'homogénéisation numérique (les éléments finis au carré), qui permet de définir une loi de comportement à partir de la caractérisation microscopique d'un milieu périodique. En utilisant

cette approche, la matrice tangente $E_{(x,y)ij}^{\tau 1}$ du problème continu linéarisé est calculée de façon numérique avec la méthode des perturbations. Il s'agit de faire une dérivée numérique de la contrainte en fonction d'une perturbation donnée ϵ de chaque degré de liberté. De cette façon chaque sous-matrice du bloc bleu ciel sera calculée de telle sorte que chaque composante sera a priori non nulle.

Les sous-matrices correspondantes aux termes couplés entre le comportement mécanique et le comportement hydraulique ($G1_{(2x4)}^{\tau 1}$, $G2_{(2x3)}^{\tau 1}$, $K_{WM(4x3)}^{\tau 1}$, $K_{MW(3x4)}^{\tau 1}$ et $K_{WW(3x3)}^{\tau 1}$) sont dépendantes des hypothèses faites sur la microstructure du milieu au niveau de sa géométrie et de sa caractérisation hydromécanique.

De façon générale, nous exprimons la contrainte du mélange $d\sigma_{il}^{\tau 1}$, la densité du mélange $d\rho^{mix,\tau 1}$, le flux massique $dm_i^{\tau 1}$ et la variation de la masse fluide $d\dot{M}^{\tau 1}$ en fonction de tous les degrés de liberté (équations 2.98). Les équations 2.98 sous format matriciel sont écrites en figure 2.7.

$$\begin{aligned} d\sigma_{il}^{\tau 1} &= \mathbb{C}_{ilkj} \frac{\partial du_k^{\tau 1}}{\partial x_j^{\tau 1}} + A_{il} dp_w^{\tau 1} + B_{ilj} \frac{\partial dp_w^{\tau 1}}{\partial x_j^{\tau 1}} \\ d\rho^{mix,\tau 1} &= D_{ij} \frac{\partial du_i^{\tau 1}}{\partial x_j^{\tau 1}} + E dp_w^{\tau 1} + G_k \frac{\partial dp_w^{\tau 1}}{\partial x_k^{\tau 1}} \\ dm_i^{\tau 1} &= A_{ijk} \frac{\partial du_j^{\tau 1}}{\partial x_k^{\tau 1}} + L_i dp_w^{\tau 1} + J_{ik} \frac{\partial dp_w^{\tau 1}}{\partial x_k^{\tau 1}} \\ d\dot{M}^{\tau 1} &= K_{jk} \frac{\partial du_j^{\tau 1}}{\partial x_k^{\tau 1}} + I dp_w^{\tau 1} + Q_k \frac{\partial dp_w^{\tau 1}}{\partial x_k^{\tau 1}} \end{aligned} \quad (2.98)$$

En comparant les figures 2.7 et 2.6, il est clair qu'a priori aucune composante de la

$E1_{11}^{\tau 1}$	$E1_{12}^{\tau 1}$	$E1_{13}^{\tau 1}$	$E1_{14}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM11}^{\tau 1}$	$K_{WM12}^{\tau 1}$	$K_{WM13}^{\tau 1}$
$E1_{21}^{\tau 1}$	$E1_{22}^{\tau 1}$	$E1_{23}^{\tau 1}$	$E1_{24}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM21}^{\tau 1}$	$K_{WM22}^{\tau 1}$	$K_{WM23}^{\tau 1}$
$E1_{31}^{\tau 1}$	$E1_{32}^{\tau 1}$	$E1_{33}^{\tau 1}$	$E1_{34}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM31}^{\tau 1}$	$K_{WM32}^{\tau 1}$	$K_{WM33}^{\tau 1}$
$E1_{41}^{\tau 1}$	$E1_{42}^{\tau 1}$	$E1_{43}^{\tau 1}$	$E1_{44}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM41}^{\tau 1}$	$K_{WM42}^{\tau 1}$	$K_{WM43}^{\tau 1}$
$G1_{11}^{\tau 1}$	$G1_{12}^{\tau 1}$	$G1_{13}^{\tau 1}$	$G1_{14}^{\tau 1}$	0	0	$G2_{11}^{\tau 1}$	$G2_{12}^{\tau 1}$	$G2_{13}^{\tau 1}$
$G1_{21}^{\tau 1}$	$G1_{22}^{\tau 1}$	$G1_{23}^{\tau 1}$	$G1_{24}^{\tau 1}$	0	0	$G2_{21}^{\tau 1}$	$G2_{22}^{\tau 1}$	$G2_{23}^{\tau 1}$
$K_{MW11}^{\tau 1}$	$K_{MW12}^{\tau 1}$	$K_{MW13}^{\tau 1}$	$K_{MW14}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WW11}^{\tau 1}$	$K_{WW12}^{\tau 1}$	$K_{WW13}^{\tau 1}$
$K_{MW21}^{\tau 1}$	$K_{MW22}^{\tau 1}$	$K_{MW23}^{\tau 1}$	$K_{MW24}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WW21}^{\tau 1}$	$K_{WW22}^{\tau 1}$	$K_{WW23}^{\tau 1}$
$K_{MW31}^{\tau 1}$	$K_{MW32}^{\tau 1}$	$K_{MW33}^{\tau 1}$	$K_{MW34}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WW31}^{\tau 1}$	$K_{WW32}^{\tau 1}$	$K_{WW33}^{\tau 1}$

FIGURE 2.7 – Bloc bleu ciel de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$

matrice tangente est nulle ou égale à d'autre composantes.

La méthode de perturbation

Les matrices tangentes consistantes $E1_{(4x4)}^{\tau 1}$ (bloc bleu ciel) et $D_{(8x8)}^{\tau 1}$ (bloc vert) utilisées pour les calculs de la matrice tangente $E_{(x,y)}^{\tau 1}$ sont différentes des matrices constitutives qui expriment le comportement en contrainte du milieu continu. Elles coïncident si la taille du pas de temps Δt est infinitésimale. Les calculs numériques étant toujours faits sur pas de temps Δt de taille finie, les lois de comportement sous forme matricielle ne peuvent pas être envisagées pour le calcul des matrices tangentes consistantes.

La méthode développée ici pour le calcul des matrices tangentes consistantes est une méthode numérique (*méthode des perturbations*) bien adaptée à la fois à l'algorithme numérique et à la loi de comportement utilisée. C'est pour cela qu'elle est utilisée pour le calcul de toute la matrice de figure 2.7 dans la méthode des éléments finis aux carré (part IV) mais aussi pour le calcul de $C_{(4x4)}^{\tau 1}$ (figure 2.7) dans le cas d'une loi de comportement classique (loi de comportement élasto-plastique, partie III). Dans les deux cas, elle est aussi utilisée pour le calcul de la matrice $D_{(8x8)}^{\tau 1}$ concernant le comportement de la partie second gradient.

La méthode des perturbations consiste à calculer une contrainte σ_{ij} pour un incrément de déformation donné et aussi une contrainte σ_{ij}^ϵ correspondante à une légère perturbation ϵ de chaque composante de la déformation. À l'aide de l'équation 2.99, il est possible calculer chaque composante de la matrice tangente consistante.

$$E_{(x,y)}^{\tau 1} = \frac{\sigma_{ij}^{\epsilon, \tau 1} - \sigma_{ij}^{\tau 1}}{\epsilon} \quad (2.99)$$

L'équation 2.99 montre que si la valeur de la perturbation ϵ est trop grande, le calcul de la matrice tangente consistante s'écarte trop de sa valeur théorique et la vitesse quadratique de convergence. Si la perturbation ϵ est trop petite, on risque de mal calculer les composantes de $E_{(x,y)}^{\tau 1}$ puisque celles-ci sont influencées par le bruit numérique. Afin d'éviter ces cas il est nécessaire de bien caler ce paramètre à l'aide des expériences numériques.

La méthode de perturbation est assez coûteuse en temps de calculs puisqu'il est nécessaire de calculer la contrainte cinq fois. Dans le cadre des éléments finis aux carré, tout le bloc bleu ciel de la matrice $E_{(x,y)}^{\tau 1}$ est calculé avec cette méthode : l'intégration de la loi de comportement se répète donc huit fois. Dans les deux cas, le calcul de la matrice $D_{(8x8)}^{\tau 1}$ aussi a été fait avec cette méthode impliquant une intégration de la double contrainte neuf fois.

Même si les désavantages sont nombreux, il est préférable de choisir une telle approche puisque la méthode analytique peut être compliquée et parfois impossible à formuler pour certains modèles (par exemple, dans l'homogénéisation numérique, FEM²,

partie IV). Les équations 2.100 montrent un exemple de l'application de la méthode de perturbation.

$\underline{j^\epsilon=1}$ $\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx} + \epsilon && \mapsto \sigma_{xx}^{j^\epsilon=1} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy} && \mapsto \sigma_{yy}^{j^\epsilon=1} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy} && \mapsto \sigma_{xy}^{j^\epsilon=1} \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz} && \mapsto \sigma_{zz}^{j^\epsilon=1} \\ \partial_x p_w &= \partial_x p_w && \mapsto m_x^{j^\epsilon=1} \\ \partial_y p_w &= \partial_y p_w && \mapsto m_y^{j^\epsilon=1} \\ p_w &= p_w && \mapsto \dot{M}_w^{j^\epsilon=1} \end{aligned}$	$\underline{j^\epsilon=2}$ $\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx} && \mapsto \sigma_{xx}^{j^\epsilon=2} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy} + \epsilon && \mapsto \sigma_{yy}^{j^\epsilon=2} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy} && \mapsto \sigma_{xy}^{j^\epsilon=2} \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz} && \mapsto \sigma_{zz}^{j^\epsilon=2} \\ \partial_x p_w &= \partial_x p_w && \mapsto m_x^{j^\epsilon=2} \\ \partial_y p_w &= \partial_y p_w && \mapsto m_y^{j^\epsilon=2} \\ p_w &= p_w && \mapsto \dot{M}_w^{j^\epsilon=2} \end{aligned}$	$\underline{j^\epsilon=7}$ $\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx} && \mapsto \sigma_{xx}^{j^\epsilon=7} \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy} && \mapsto \sigma_{yy}^{j^\epsilon=7} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy} && \mapsto \sigma_{xy}^{j^\epsilon=7} \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz} && \mapsto \sigma_{zz}^{j^\epsilon=7} \\ \partial_x p_w &= \partial_x p_w && \mapsto m_x^{j^\epsilon=7} \\ \partial_y p_w &= \partial_y p_w && \mapsto m_y^{j^\epsilon=7} \\ p_w &= p_w + \epsilon && \mapsto \dot{M}_w^{j^\epsilon=7} \end{aligned}$
--	--	--

$E_{11} = [\sigma_{xx}^{j^\epsilon=1} - \sigma_{xx}] / \epsilon$	$E_{12} = [\sigma_{xx}^{j^\epsilon=2} - \sigma_{xx}] / \epsilon$	$E_{19} = [\sigma_{xx}^{j^\epsilon=7} - \sigma_{xx}] / \epsilon$
$E_{21} = [\sigma_{yx}^{j^\epsilon=1} - \sigma_{yx}] / \epsilon$	$E_{22} = [\sigma_{yx}^{j^\epsilon=2} - \sigma_{yx}] / \epsilon$	$E_{29} = [\sigma_{yx}^{j^\epsilon=7} - \sigma_{yx}] / \epsilon$
$E_{31} = [\sigma_{xy}^{j^\epsilon=1} - \sigma_{xy}] / \epsilon$	$E_{32} = [\sigma_{xy}^{j^\epsilon=2} - \sigma_{xy}] / \epsilon$	$E_{39} = [\sigma_{xy}^{j^\epsilon=7} - \sigma_{xy}] / \epsilon$
$E_{41} = [\sigma_{yy}^{j^\epsilon=1} - \sigma_{yy}] / \epsilon$	$E_{42} = [\sigma_{yy}^{j^\epsilon=2} - \sigma_{yy}] / \epsilon$	$E_{49} = [\sigma_{yy}^{j^\epsilon=7} - \sigma_{yy}] / \epsilon$
$E_{51} = [\rho^{j^\epsilon=1} - \rho] / \epsilon$	$E_{52} = [\rho^{j^\epsilon=2} - \rho] / \epsilon$	$E_{59} = [\rho^{j^\epsilon=7} - \rho] / \epsilon$
$E_{61} = [\rho^{j^\epsilon=1} - \rho] / \epsilon$	$E_{62} = [\rho^{j^\epsilon=2} - \rho] / \epsilon$	$E_{69} = [\rho^{j^\epsilon=7} - \rho] / \epsilon$
$E_{71} = [m_x^{j^\epsilon=1} - m_x] / \epsilon$	$E_{72} = [m_x^{j^\epsilon=2} - m_x] / \epsilon$	$E_{79} = [m_x^{j^\epsilon=7} - m_x] / \epsilon$
$E_{81} = [m_y^{j^\epsilon=1} - m_y] / \epsilon$	$E_{82} = [m_y^{j^\epsilon=2} - m_y] / \epsilon$	$E_{89} = [m_y^{j^\epsilon=7} - m_y] / \epsilon$
$E_{91} = [\dot{M}^{j^\epsilon=1} - \dot{M}] / \epsilon$	$E_{92} = [\dot{M}^{j^\epsilon=2} - \dot{M}] / \epsilon$	$E_{99} = [\dot{M}^{j^\epsilon=7} - \dot{M}] / \epsilon$

(2.100)

2.4.4 Discrétisation en éléments finis

Les éléments finis utilisés pour un milieu continu second gradient sont des éléments quadrilatéraux non-conformes à huit nœuds pour la partie mécanique premier gradient (degrés de liberté en déplacement u_i) ; quatre nœuds pour la description de la mécanique pour la partie second gradient (degrés de liberté sur la déformation microscopique v_{ij}) ; et huit nœuds pour la description de la partie hydraulique (degrés de liberté en pression d'eau p_w). La figure 2.8 montre de façon schématique la définition de l'élément second gradient.

Pour intégrer les équations de la formulation faible avec la méthode de quadrature de Gauss, nous exprimons toutes les fonctions du problème sur l'espace mathématique de l'élément parent dont les côtes du quadrilatère sont de taille unitaire. Ces fonctions

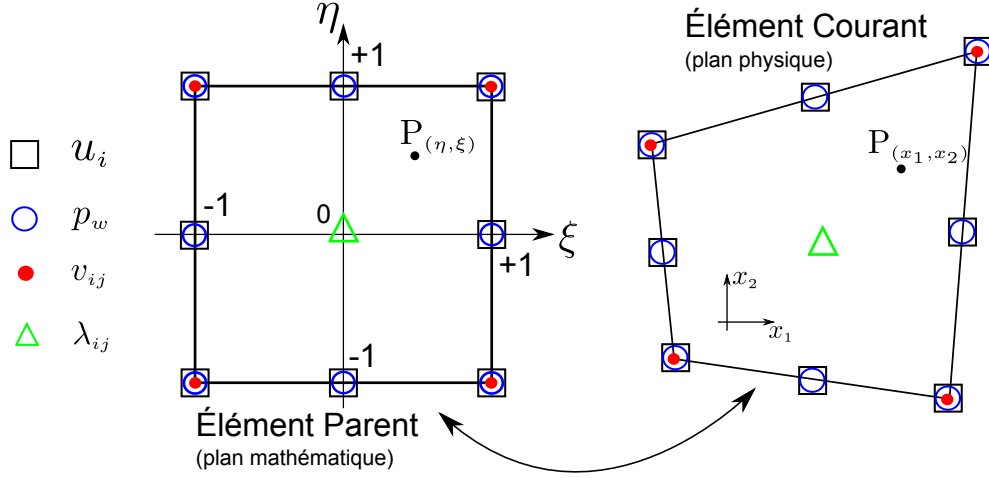


FIGURE 2.8 – Éléments finis pour un milieu second gradient.

seront écrites sous la forme d'une combinaison linéaire entre les fonctions interpolantes polynomiales N_i et les degrés de liberté définis sur les nœuds . Les déplacements u_i et la pression d'eau p_w peuvent donc s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} u_\xi(\xi, \eta) \\ u_\eta(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi(-1, -1) \\ u_\eta(-1, -1) \\ u_\xi(0, -1) \\ u_\eta(0, -1) \\ u_\xi(+1, -1) \\ u_\eta(+1, -1) \\ \dots \\ \dots \\ u_\xi(-1, 0) \\ u_\eta(-1, 0) \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

$$p_w(\xi, \eta) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_8] \begin{bmatrix} p_w(-1, -1) \\ p_w(0, -1) \\ p_w(-1, +1) \\ \dots \\ \dots \\ p_w(-1, 0) \end{bmatrix}$$

Pour que la valeur nodale des degrés de liberté soit satisfaite, les fonctions interpolantes doivent présenter une valeur unitaire sur les nœuds de l'élément. Les fonctions de forme pour les déplacements u_i et la pression d'eau p_w sont les suivantes :

$$\begin{aligned} N_1 &= 0.25 (1 - \xi) (1 - \eta) (-1 - \eta - \xi) & N_2 &= 0.5 (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\ N_3 &= 0.25 (1 + \xi) (1 - \eta) (-1 - \eta + \xi) & N_4 &= 0.5 (1 + \xi) (1 - \eta^2) \\ N_5 &= 0.25 (1 + \xi) (1 + \eta) (-1 + \eta + \xi) & N_6 &= 0.5 (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\ N_7 &= 0.25 (1 - \xi) (1 + \eta) (-1 - \eta + \xi) & N_8 &= 0.5 (1 - \eta^2) (1 - \xi) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Les degrés de liberté de la déformation microscopique v_{ij} sont définis aux coins de l'élément.

$$\begin{bmatrix} v_{\xi\xi}(\xi, \eta) \\ v_{\xi\eta}(\xi, \eta) \\ v_{\eta\xi}(\xi, \eta) \\ v_{\eta\eta}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & M_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\xi\xi}(-1, -1) \\ v_{\xi\eta}(-1, -1) \\ v_{\eta\xi}(-1, -1) \\ v_{\eta\eta}(-1, -1) \\ \dots \\ \dots \\ v_{\xi\xi}(-1, +1) \\ v_{\xi\eta}(-1, +1) \\ v_{\eta\xi}(-1, +1) \\ v_{\eta\eta}(-1, +1) \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Les fonctions des formes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} M_1 &= 0.25 (1 - \xi) (1 - \eta) & M_2 &= 0.25 (1 + \xi) (1 - \eta) \\ M_3 &= 0.25 (1 + \xi) (1 + \eta) & M_4 &= 0.25 (1 - \xi) (1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Pour les multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\xi\xi}(\xi, \eta) \\ \lambda_{\xi\eta}(\xi, \eta) \\ \lambda_{\eta\xi}(\xi, \eta) \\ \lambda_{\eta\eta}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\xi\xi}(0, 0) \\ \lambda_{\xi\eta}(0, 0) \\ \lambda_{\eta\xi}(0, 0) \\ \lambda_{\eta\eta}(0, 0) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Les fonctions de forme N_i utilisées pour décrire les coordonnées nodales x_i en fonction des coordonnées de l'élément parent sont les mêmes utilisées pour les déplacements. On parle donc d'éléments isoparamétriques

$$\begin{bmatrix} x_\xi(\xi, \eta) \\ x_\eta(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\xi(-1, -1) \\ x_\eta(-1, -1) \\ x_\xi(0, -1) \\ x_\eta(0, -1) \\ \dots \\ x_\xi(-1, 0) \\ x_\eta(-1, 0) \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Matrice de rigidité de l'élément

Pour écrire la matrice de rigidité de l'élément il est d'abord nécessaire d'écrire chaque variable des vecteurs $[dU_{(x,y)}]$, $[dU_{(x,y)}^*]$ en fonction des coordonnées ξ , η de l'élément parent.

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \quad (2.107)$$

Nous écrivons les équations 2.107 sous forme matricielle pour la première composante des déplacements.

$$t_{(2x2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 \\ \partial u_1 / \partial x_2 \end{bmatrix}_i = [t_{ij}] \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial \xi \\ \partial u_1 / \partial \eta \end{bmatrix}_j \\ \begin{bmatrix} \partial u_2 / \partial x_1 \\ \partial u_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}_i = [t_{ij}] \begin{bmatrix} \partial u_2 / \partial \xi \\ \partial u_2 / \partial \eta \end{bmatrix}_j \end{array} \right. \quad (2.108)$$

Il est donc possible de récrire l'équation 2.108 pour tous les degrés de liberté du vecteur $[dU_{(x,y)}]$ en utilisant la matrice de transformation t_{ij} . De cette manière nous exprimons une relation entre le vecteur $[dU_{(x,y)}]$ et le vecteur $[dU_{(\xi,\eta)}]$ à l'aide de la matrice T_{ij} . Le vecteur $[dU_{(\xi,\eta)}]$ est composé par tous les degrés de liberté dans le plan mathématique de l'élément parent.

$$[dU_{(x,y)}]_{(25x1)} = [T]_{(25x25)} [dU_{(\xi,\eta)}]_{(25x1)}$$

$$[U_{(\xi,\eta)}^{\star,\tau 1}]_i = \left[\frac{\partial u_1^{\star,\tau 1}}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^{\star,\tau 1}}{\partial \eta} \frac{\partial u_2^{\star,\tau 1}}{\partial \xi} \frac{\partial u_2^{\star,\tau 1}}{\partial \eta} u_1^{\star,\tau 1} u_2^{\star,\tau 1} \frac{\partial p_w^{\star,\tau 1}}{\partial \xi} \frac{\partial p_w^{\star,\tau 1}}{\partial \eta} p_w^{\star,\tau 1} \frac{\partial v_{11}^{\star,\tau 1}}{\partial \xi} \frac{\partial v_{11}^{\star,\tau 1}}{\partial \eta} \right. \\ \left. \frac{\partial v_{12}^{\star,\tau 1}}{\partial \xi} \frac{\partial v_{12}^{\star,\tau 1}}{\partial \eta} \frac{\partial v_{21}^{\star,\tau 1}}{\partial \xi} \frac{\partial v_{21}^{\star,\tau 1}}{\partial \eta} \frac{\partial v_{22}^{\star,\tau 1}}{\partial \xi} \frac{\partial v_{22}^{\star,\tau 1}}{\partial \eta} v_{11}^{\star,\tau 1} v_{12}^{\star,\tau 1} v_{21}^{\star,\tau 1} v_{22}^{\star,\tau 1} \lambda_{11}^{\star,\tau 1} \lambda_{12}^{\star,\tau 1} \lambda_{21}^{\star,\tau 1} \lambda_{22}^{\star,\tau 1} \right]$$

En définissant le vecteur $\mathbf{0} = [0 \ 0; 0 \ 0]$ il est possible de définir la matrice T_{ij} comme suit :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} t_{(2x2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & t_{(2x2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{(2x2)} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & t_{(2x2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & t_{(2x2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & t_{(2x2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & t_{(2x2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & t_{(2x2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{(4x4)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{(4x4)} \end{bmatrix}_{(25x25)}$$

Il ne reste qu'à écrire une relation entre les degrés de liberté $[dU_{(\xi,\eta)}]$ en fonction des degrés de liberté définis sur les nœuds $[dU_{node}]$. Pour cela nous introduisons la matrice de transformation B_{ij} de la façon suivante.

$$[dU_{(\xi,\eta)}]_{(25x1)} = [B]_{(25x44)} [dU_{node}]_{(44x1)} \quad (2.109)$$

Le vecteur $[dU_{node}]$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 [dU_{node}]^T = [& du_{1(-1,-1)}^{\tau 1} \ du_{2(-1,-1)}^{\tau 1} \ dp_{(-1,-1)}^{\tau 1} \ dv_{11(-1,-1)}^{\tau 1} \ dv_{12(-1,-1)}^{\tau 1} \ dv_{21(-1,-1)}^{\tau 1} \ dv_{22(-1,-1)}^{\tau 1} \\
 & du_{1(0,-1)}^{\tau 1} \ du_{2(0,-1)}^{\tau 1} \ dp_{(0,-1)}^{\tau 1} \\
 & du_{1(+1,-1)}^{\tau 1} \ du_{2(+1,-1)}^{\tau 1} \ dp_{(+1,-1)}^{\tau 1} \ dv_{11(+1,-1)}^{\tau 1} \ dv_{12(+1,-1)}^{\tau 1} \ dv_{21(+1,-1)}^{\tau 1} \\
 & dv_{22(+1,-1)}^{\tau 1} \ du_{1(+1,0)}^{\tau 1} \ du_{2(+1,0)}^{\tau 1} \ dp_{(+1,0)}^{\tau 1} \\
 & du_{1(+1,+1)}^{\tau 1} \ du_{2(+1,+1)}^{\tau 1} \ dp_{(+1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{11(+1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{12(+1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{21(+1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{22(+1,+1)}^{\tau 1} \\
 & du_{1(0,+1)}^{\tau 1} \ du_{2(0,+1)}^{\tau 1} \ dp_{(0,+1)}^{\tau 1} \\
 & du_{1(-1,+1)}^{\tau 1} \ du_{2(-1,+1)}^{\tau 1} \ dp_{(-1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{11(-1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{12(-1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{21(-1,+1)}^{\tau 1} \ dv_{22(-1,+1)}^{\tau 1} \\
 & du_{1(-1,0)}^{\tau 1} \ du_{2(-1,0)}^{\tau 1} \ dp_{(-1,0)}^{\tau 1} \\
 & d\lambda_{11(0,0)}^{\tau 1} \ d\lambda_{12(0,0)}^{\tau 1} \ d\lambda_{21(0,0)}^{\tau 1} \ d\lambda_{22(0,0)}^{\tau 1} \]_{(44 \times 1)}
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Afin d'exprimer la matrice $[B_{ij}]$ nous définissons les sous-matrices $a_{ij}^{k,l}$, b_{ij}^k et c_{ij} (équations 2.111, 2.112.a et 2.112.b). Les indices k,l sont utilisés pour identifier le nombre des fonctions de forme envisagées pour la partie hydromécanique (indice k) et la partie second gradient (indice l). Dans ces matrices nous avons indiqué les dérivées partielles par rapport à ξ et η avec les symboles $\partial_\xi(\bullet)$ et $\partial_\eta(\bullet)$.

$$[a_{ij}^{k,l}] = \begin{bmatrix} \partial_\xi N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_\eta N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\xi N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\eta N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\xi N_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\eta N_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\xi M_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\eta M_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_\xi M_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_\eta M_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_\xi M_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_\eta M_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_\xi M_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_\eta M_l \\ 0 & 0 & 0 & M_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

$$[b_{ij}^k] = \begin{bmatrix} \partial_\xi N_k & 0 & 0 \\ \partial_\eta N_k & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\xi N_k & 0 \\ 0 & \partial_\eta N_k & 0 \\ N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\xi N_k \\ 0 & 0 & \partial_\eta N_k \\ 0 & 0 & N_k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

La matrice $[B_{ij}]$ peut ainsi se définir comme suit :

$$[B_{ij}]_{(25 \times 44)} = [a_{(25 \times 7)}^{1,1} \quad b_{(25 \times 3)}^2 \quad a_{(25 \times 7)}^{3,2} \quad b_{(25 \times 3)}^4 \quad a_{(25 \times 7)}^{5,3} \quad b_{(25 \times 3)}^6 \quad a_{(25 \times 7)}^{7,4} \quad b_{(25 \times 3)}^8 \quad c_{(25 \times 4)}] \quad (2.113)$$

En utilisant l'équation 2.83 il est possible d'écrire l'équation de rigidité de l'élément k^{elem} .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{elem}^{\tau 1}} [U_{(x,y)}^{*,\tau 1}] [E_{(x,y)}^{\tau 1}] [dU_{(x,y)}^{\tau 1}] d\Omega^{\tau 1} &= \\ &= [U_{node}^{*,\tau 1}]^\top \left\{ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^\top [T]^\top [E_{(x,y)}^{\tau 1}] [T] [B] J^{\tau 1} d\xi d\eta \right\} [dU_{node}^{\tau 1}] = \\ &= [U_{node}^{*,\tau 1}]^\top [k_{elem}^{\tau 1}] [dU_{node}^{\tau 1}] \end{aligned}$$

$$\boxed{k_{(44 \times 44)}^{elem} = [B]_{(44 \times 25)}^\top [T]_{(25 \times 25)}^\top [E_{(x,y)}]_{(25 \times 25)} [T]_{(25 \times 25)} [B]_{(25 \times 44)} J^{\tau 1}} \quad (2.114)$$

$J^{\tau 1}$ représente le déterminant de la matrice t_{ij}^{-1} (équation 2.108).

Forces hors d'équilibre

Afin d'écrire le terme de droite de l'équation 2.83 de façon algébrique, nous calculons le résiduel de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & -R^{*,\tau 1} - S^{*,\tau 1} - W^{*,\tau 1} = \\
 & = W_{ext}^{*,\tau 1} - \int_{\Omega^{\tau 1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^{\tau 1}} & \frac{\partial p_w^*}{\partial x_j^{\tau 1}} & p_w^* & \frac{\partial v_{ij}^*}{\partial x_k^{\tau 1}} & v_{ij}^* & \lambda_{ij}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{\tau 1} - \lambda_{ij}^{\tau 1} \\ m_i^{\tau 1} \\ \dot{M}^{\tau 1} \\ \Sigma_{ijk}^{\tau 1} \\ \lambda_{ij}^{\tau 1} \\ \frac{\partial u_i^{\tau 1}}{\partial x_j^{\tau 1}} - v_{ij}^{\tau 1} \end{bmatrix} d\Omega^{\tau 1} = \\
 & = W_{ext}^{*,\tau 1} - \int_{\Omega^{\tau 1}} [U_{(x,y)}^{*,\tau 1}]^\top [\sigma^{\tau 1}]_i d\Omega^{\tau 1} = \\
 & = W_{ext}^{*,\tau 1} - [U_{node}^{*,\tau 1}]^\top \left\{ \int_{+1}^{-1} \int_{+1}^{-1} [B^{\tau 1}]^\top [T^{\tau 1}]^\top [\sigma^{\tau 1}] J^{\tau 1} d\xi d\eta \right\} = [U_{node}^{*,\tau 1}]^\top [f_{elem}^{\tau 1}] \\
 & \boxed{-R^{*,\tau 1} - S^{*,\tau 1} - W^{*,\tau 1} = [U_{node}^{*,\tau 1}]^\top [f_{elem}^{\tau 1}]} \tag{2.115}
 \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation 2.83 les équations 2.114 et 2.115, nous obtenons les équations algébriques qui concernent un élément du domaine discrétisé (équation 2.116).

$$[U_{elem}^{*,\tau 1}]^\top [k_{elem}^{\tau 1}] [dU_{elem}^{\tau 1}] = -[U_{elem}^{*,\tau 1}]^\top [f_{elem}^{\tau 1}] \tag{2.116}$$

$f_{elem}^{\tau 1}$ représente le vecteur de force hors d'équilibre d'un élément.

Équations globales des éléments finis

Il est possible de récrire l'équation 2.116 selon la numérotation globale des nœuds pour le problème étudié. Puisqu'un élément partage ses nœuds avec les éléments autour de lui, nous additionnons tous les termes de $k_{elem}^{*,\tau 1}$ et $f_{elem}^{\tau 1}$ concernant les nœuds en commun avec les éléments auxquels il appartiennent. Cette opération est appelée assemblage du système (équation 2.117).

$$K_{global}^{\tau 1} = \bigoplus_{el=1}^{n^{\circ}elem} k_{el}^{\tau 1} \quad F_{global}^{\tau 1} = \bigoplus_{el=1}^{n^{\circ}elem} F_{el}^{\tau 1} \tag{2.117}$$

De cette façon nous arrivons à écrire le système linéaire du problème.

$$\begin{aligned}
 & [U_{global}^{*,\tau 1}]^\top [K_{global}^{\tau 1}] [dU_{global}^{\tau 1}] = -[U_{global}^{*,\tau 1}]^\top [F_{global}^{\tau 1}] \\
 & [U_{global}^{*,\tau 1}]^\top \{ [K_{global}^{\tau 1}] [dU_{global}^{\tau 1}] + [F_{global}^{\tau 1}] \} = 0 \\
 & \boxed{[K_{global}^{\tau 1}] [dU_{global}^{\tau 1}] + [F_{global}^{\tau 1}] = 0} \tag{2.118}
 \end{aligned}$$

Nous rappelons que la linéarisation du problème continu a été faite en envisageant deux configurations du milieu Ω^{τ^1} et Ω^{τ^2} , très proches entre elles. La première peut être considérée comme une configuration obtenue pendant l'itération i d'un algorithme de Newton-Raphson pour laquelle la valeur résiduelle des équations d'équilibre et de bilan n'est pas proche de zéro. La configuration Ω^{τ^2} peut être considérée comme celle à l'itération $i=i+1$ pour laquelle le résidu s'annule.

De cette façon l'équation 2.119 peut être utilisée pendant le processus itérative de Newton-Raphson en actualisant la configuration actuelle à l'itération i avec les corrections nodales $[\delta U_{global}^{t^i}]$.

$$\begin{bmatrix} K_{global}^{t^i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U_{global}^{t^i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{global}^{t^i} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.119)$$

De façon schématique nous présentons dans le tableau 2.2 l'algorithme de résolution d'un problème aux éléments finis pour le logiciel utilisé dans la suite de cette thèse (Lagamine, Université de Liège).

Calcul des paramètres de convergence

Pour vérifier que la configuration actualisée par les corrections nodales $[\delta U_{global}^{t^i}]$ mène à des solutions équilibrées il est nécessaire de calculer un paramètre qui dépende des forces nodales hors d'équilibre (convergence en force) ainsi qu'un paramètre qui dépend des corrections nodales (convergence en déplacement).

Le critère de convergence envisagé est basé sur une norme euclidienne à la fois des forces nodales hors d'équilibre et des corrections nodales à chaque itération. On calcule ainsi :

$$\text{FNORM}(j_{DDL}) = \sum_{i=1}^{noeuds} F_i^2 \implies \text{NFOR}(j_{DDL}) \quad (2.120)$$

$$\text{RNORM}(j_{DDL}) = \sum_{i=1}^{noeuds} R_i^2 \implies \text{NREA}(j_{DDL}) \quad (2.121)$$

FNORM et RNORM représentent le carré de la norme euclidienne respectivement sur les forces nodales et les réactions nodales définies pour chaque degré de liberté alors que NFOR et NREA représentent le nombre des nœuds pour lequel une force et une réaction nodale sont définies.

En regroupant les forces et les réactions nodales pour le degrés de liberté premier gradient (FNOR(1)), hydraulique (FNOR2), second gradient (FNOR3), nous obtenons les équations suivantes :

$$\text{FNOR}(1) = \text{FNORM}(1) + \text{FNORM}(2)$$

$$\text{FNOR}(2) = \text{FNORM}(3)$$

$$\text{FNOR}(3) = \text{FNORM}(4) + \text{FNORM}(5) + \text{FNORM}(6) + \text{FNORM}(7)$$

$$\text{RNOR}(1) = \text{RNORM}(1) + \text{RNORM}(2)$$

$$\text{RNOR}(2) = \text{RNORM}(3)$$

$$\text{RNOR}(3) = \text{RNORM}(4) + \text{RNORM}(5) + \text{RNORM}(6) + \text{RNORM}(7)$$

En regroupant le nombre des nœuds où les forces nodales et les réactions sont définies nous arrivons aux équations suivantes :

$$\text{NFO}(1) = \text{NFOR}(1) + \text{NFOR}(2)$$

$$\text{NFO}(2) = \text{NFOR}(3)$$

$$\text{NFO}(3) = \text{NFOR}(4) + \text{NFOR}(5) + \text{NFOR}(6) + \text{NFOR}(7)$$

$$\text{NRE}(1) = \text{NREA}(1) + \text{NREA}(2)$$

$$\text{NRE}(2) = \text{NREA}(3)$$

$$\text{NRE}(3) = \text{NREA}(4) + \text{NREA}(5) + \text{NREA}(6) + \text{NREA}(7)$$

Finalement le paramètre de convergence en force est calculé ainsi (équation 2.122).

$$f_{conve} = \left\{ \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\text{FNOR}(i)}{\text{NFO}(i)} \right) \left(\frac{\text{RNOR}(i)}{\text{NRE}(i)} \right)^{-1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.122)$$

Le paramètre de convergence en déplacement est calculé à partir de la norme définie sur les corrections nodales $[\delta U^{t^i}]$ et sur les incréments de déplacement $[\Delta U^{t^i}]$ sur le pas, c'est-à-dire entre les temps t^{n-1} et t^n .

$$\text{UNORM}(j_{DDL}) = \sum_{j=1}^{noeuds} \left[\delta U^{t^i} \right]_j^2$$

$$\text{DNORM}(j_{DDL}) = \sum_{j=1}^{noeuds} \left[\Delta U^{t^i} \right]_j^2$$

En regroupant tous les degrés de liberté nous obtenons les équations suivantes :

$$\text{UNOR}(1) = \text{UNORM}(1) + \text{UNORM}(2)$$

$$\text{UNOR}(2) = \text{UNORM}(3)$$

$$\text{UNOR}(3) = \text{UNORM}(4) + \text{UNORM}(5) + \text{UNORM}(6) + \text{UNORM}(7)$$

$$\text{DNOR}(1) = \text{DNORM}(1) + \text{DNORM}(2)$$

$$\text{DNOR}(2) = \text{DNORM}(3)$$

$$\text{DNOR}(3) = \text{DNORM}(4) + \text{DNORM}(5) + \text{DNORM}(6) + \text{DNORM}(7)$$

Le paramètre de convergence en déplacement est calculé ainsi (équation 2.123).

$$d_{conve} = \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\text{UNOR}(i)}{\text{DNOR}(i)} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.123)$$

À la fin de chaque itération, les paramètres de convergence en forces f_{conve} et en déplacements d_{conve} sont comparés avec des données qui représentent la précision numérique en force et en déplacement afin de pouvoir établir si le problème aux éléments finis vérifie de façon satisfaisante l'équilibre et le bilan de masse pour chaque pas de temps.

Le logiciel utilisé pour résoudre un problème aux éléments finis (Lagamine, Université de Liège) permet de définir d'autres normes pour le calcul du paramètre de convergence (équations 2.124).

$$\begin{aligned} \text{FNORM}(j_{DDL}) &= \sum_{i=1}^{noeuds} |F_i| \\ \text{FNORM}(j_{DDL}) &= \max(F_i) \end{aligned} \quad (2.124)$$

Les calculs présentés dans la partie III et IV ont été faits avec la norme définie dans l'équation 2.120 pour les forces et les degrés de liberté.

1. Configuration initiale : contrainte $\sigma_{ij}^{t_{n-1}}$ double contrainte $\Sigma_{ij}^{t_{n-1}}$, coordonnées nodales $x_i^{t_{n-1}}$ et pression d'eau $p_w^{t_{n-1}}$
2. Hypothèse sur la configuration finale Ω^{t_n} . Début de l'itération i
3. Boucle sur les éléments
 - (a) Boucle sur le nombre de points de Gauss
 - i. Intégration des lois de comportement^I pour la cinématique première gradient et second gradient. Calcul des contraintes effectives $\Delta\sigma_{ij}^{t_n}$ et des doubles contraintes $\Delta\Sigma_{ij}^{t_n}$.
 - ii. Mise à jour des contraintes et des variables d'état.
 - iii. Calcul des matrices tangentes consistantes C^{t_n} et D^{t_n} par une méthode de perturbation.
 - iv. Calcul du flux massique $m_i^{t_n}$ et de la variation de masse fluide \dot{M}^{t_n} pour le milieu poreux envisagé.
 - (b) Calcul des contraintes totales $\Delta\sigma_{ij}^{t_n} = \Delta\sigma_{ij}^{t_n} - p_w^{t_n}$
 - (c) Calcul de la matrice de rigidité de l'élément $k_{elem}^{t_n}$
 - (d) Calcul des forces nodales hors d'équilibre $f_{elem}^{t_n}$
4. Assemblage de la matrice globale de rigidité $K_{global}^{t_n}$ et des forces hors d'équilibre $F_{elem}^{t_n}$
5. Calcul des corrections nodales en résolvant le système linéaire $\left[K_{global}^{t_n} \right] \left[\delta U_{global}^{t_n} \right] = - \left[f_{global}^{t_n} \right]$
6. Calcul des paramètres de convergence d_{conve} et f_{conve} (équations 2.122 et 2.123).
7. Test de convergence :
 - (a) Si $[(d_{conve} < toll^{depl}) \text{ et } (f_{conve} < toll^{forces})] \implies \text{GO TO } 8$
 - (b) Si $[(d_{conve} > toll^{depl}) \text{ et } (f_{conve} > toll^{forces})] \implies i = i + 1, \text{ GO TO } 2$
8. Fin du pas de temps

TABLE 2.2 – Algorithme de Newton-Raphson pour la méthode des éléments finis.

I. Pour le cas de l'homogénéisation numérique étudié dans la partie IV, l'intégration de la loi de comportement implique le calcul de $\Delta\sigma_{ij}^{t_n}$ mais aussi de $m_i^{t_n}$ et de \dot{M}^{t_n} puisque le couplage hydromécanique du milieu est complètement défini à partir de la microstructure. Pour ce cas il n'est pas

2.5 Problème de perte d'unicité de la solution

2.5.1 Le problème numérique

Le principe d'exclusion de Hill [81] peut être utilisé pour assurer l'unicité de la solution pour un problème aux limites. Si ce théorème n'est pas satisfait aucune considération théorique concernant l'unicité ne peut pas être envisagée. Cependant il est toujours possible de montrer qu'un problème aux limites a plusieurs solutions lorsqu'on essaie d'en trouver numériquement.

Selon la façon avec laquelle nous initialisons l'algorithme de Newton-Raphson sur un pas de temps il est possible de mener le problème numérique à trouver des solutions différentes. Un exemple simple qui peut éclaircir ce concept est montré en figure 2.9 pour une fonction à une variable. Cette figure montre que, suivant le choix de la valeur initiale $x^{n=0}$ l'algorithme de Newton-Raphson arrive à trouver les différentes racines de la fonction $y = f(x)$.

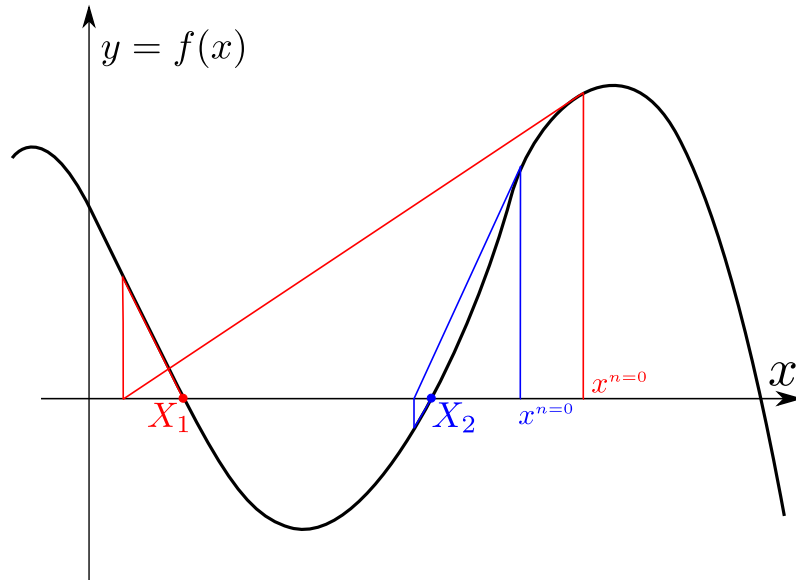


FIGURE 2.9 – Algorithme de Newton-Raphson pour une fonction à une variable $y = f(x)$

À partir des valeurs d'initialisation de l'algorithme, il est possible de définir le *bassin d'attraction* des solutions, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs initiales qui conduisent à une des solutions possibles. Le bassin d'attraction pour la fonction 2.125 définie dans le champ des nombres complexes est montré en figure 2.10.

$$x^5 - 1 = 0 \quad (2.125)$$

La fractale est délimitée par les valeurs d'initialisation qui rendent l'algorithme instable. Nous avons choisi cet exemple puisqu'il montre déjà de façon claire la complexité d'un nécessaire de calculer aucune contrainte effective.

problème de non unicité pour une fonction à un degré de liberté. Le problème de non unicité d'un problème aux limites est bien plus complexe que l'exemple montré en figure 2.9 étant donné qu'il est caractérisé par des millièmes de degrés de liberté.

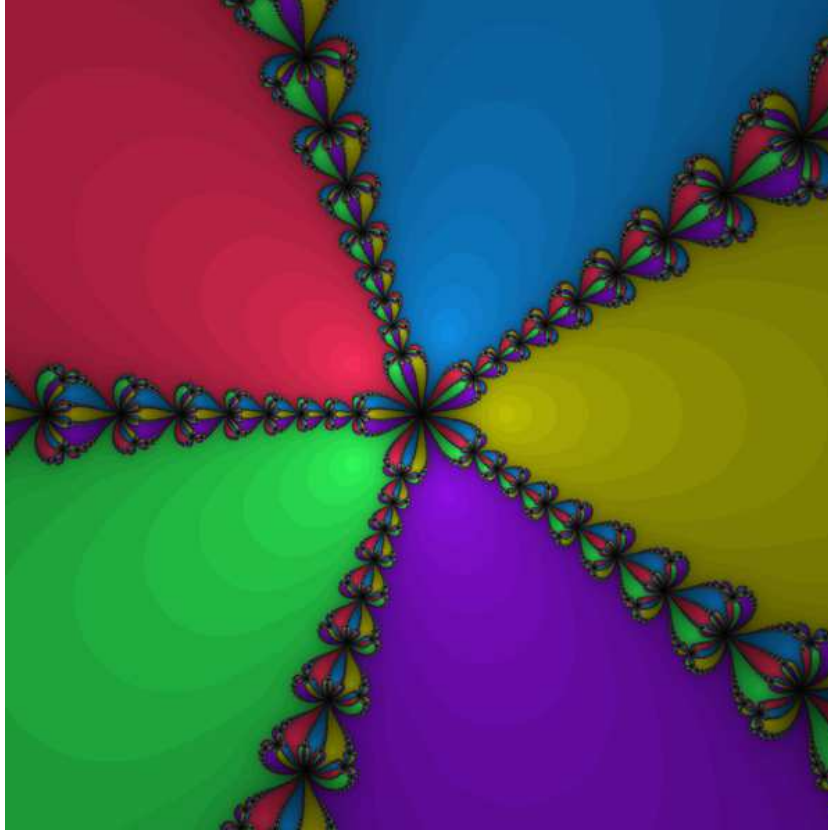


FIGURE 2.10 – Bassin d'attraction pour la fonction $x^5 - 1 = 0$ dans le plan complexe : fractale de Newton-Raphson

Il est possible, même pour un problème résolu avec les éléments finis à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson, d'arriver à montrer différentes solutions pour le même problème aux limites suivant l'hypothèse faite sur l'initialisation des coordonnées nodales pour chaque pas de temps.

Généralement l'initialisation des degrés de liberté est faite en utilisant un champ de vitesse. Différentes hypothèses peuvent se faire sur le champ de vitesse à utiliser afin d'initialiser l'algorithme de Newton-Raphson :

1. *Champ de vitesse du pas précédente :*

À la première itération de chaque pas de temps nous faisons l'hypothèse que tous les degrés de liberté se déplacent à partir du champ des vitesses du pas précédent (équation 2.126).

$$x_j^{n+1} = x_j^n + v_j^n \Delta t \quad (2.126)$$

Il semble donc clair que si nous résolvons numériquement le même problème aux limites mais en utilisant des discrétisations temporelles différentes en changeant la taille du pas de temps, l'initialisation des degrés de liberté sur le pas sera différente et donc il est possible que le problème trouve des solutions différentes.

2. *Tirage aléatoire en vitesse :*

Cette technique consiste à définir de façon aléatoire le champ de vitesse à partir duquel le problème numérique initialise les degrés de liberté à la première itération. Ce faisant le problème est soumis à une perturbation qui peut faire changer le chemin de recherche de la solution dans d'autres solutions possibles. Cette technique est utilisée par Besuelle et al. dans [27] où la non-unicité du problème est traitée pour des essais biaxiaux.

3. *Initialisation des vitesses par un fichier donné :*

Il est possible d'initialiser le champ des vitesses en l'écrivant sur un fichier donné. De cette manière on pourrait imposer au problème numérique le champ de vitesse mesuré expérimentalement avec la technique de la corrélation d'image (digital image correlation DIC). Cette méthode peut être utilisée pour vérifier s'il est possible de reproduire numériquement les bandes de cisaillement observées expérimentalement en choisissant une loi de comportement donnée pour le matériau d'étude.

Dans le chapitre 5 une étude de non-unicité est proposée en utilisant comme initialisation de l'algorithme de Newton-Raphson la méthode décrite dans le point 1 (champ de vitesse du pas précédente). Dans ce chapitre nous étudions un problème aux limites défini sur un cylindre creux. Nous allons montrer qu'en changeant les données de l'algorithme qui gère la taille du pas Δt , il est possible de trouver des solutions en bandes de cisaillement différentes dans le temps et dans l'espace.

Troisième partie

Théorie de l'élasto-plasticité : une loi de comportement anisotrope

Chapitre 3

L'anisotropie dans les géomatériaux

3.1 L'anisotropie dans les géomatériaux

3.1.1 Notions d'anisotropie dans les géomatériaux

Un matériau peut être considéré anisotrope si ses propriétés mécaniques sont dépendantes de certaines directions propres à sa structure. Les premiers à donner une distinction sur la nature des propriétés anisotropes des sols ont été Casagrande et Carrillo en 1944 [35] qui ont caractérisé l'anisotropie de deux façons différentes :

1. *Anisotropie induite* :

Elle est définie comme étant "... causée exclusivement aux déformations associées à un état des contraintes imposées sur le matériau."

2. *Anisotropie intrinsèque ou initiale* :

Elle est définie comme étant "...due aux structures internes du matériau et complètement indépendantes des déformations appliquées au matériau."

Plusieurs auteurs ont essayé d'étudier l'anisotropie dans un point de vue expérimental. En 1972, Oda [112], [113] remarque qu'en préparant par pluviation un matériau granulaire et en choisissant des grains bien arrondis, le comportement mécanique du matériau granulaire présente une forte anisotropie initiale. Oda montre aussi que le comportement anisotrope dépend des orientations préférentielles le long des axes des grains et change fortement au cours d'un essai où sont imposées des déformations de cisaillement. En 1985, Oda propose des essais de compression biaxiale afin de caractériser l'anisotropie induite dans les matériaux granulaires. Il arrive à montrer que pendant l'essai la densité des contacts normaux tend à augmenter le long de la direction de contrainte maximale principale. Il fait l'hypothèse que l'anisotropie induite par un parcours de contrainte dépend principalement de la distribution des contacts normaux, de la forme des grains et des vides.

Wong et Arthur en 1985 [153] caractérisent pour les matériaux granulaires l'anisotropie intrinsèque comme dépendante du processus de déposition et de la dimension caractéristique des grains. Afin de séparer les effets dus à l'anisotropie induite et intrinsèque, Wong et Arthur ont réalisé des essais sur un appareil de cisaillement directionnel (DSC) avec le sable Leighton Buzz. Il est ainsi possible de séparer les effets de l'anisotropie induite et de celle intrinsèque puisque la direction de remplissage par pluviation est orthogonale au plan des déformations sur lequel le matériau atteint un état isotrope. Les auteurs peuvent alors montrer que la résistance drainée au cisaillement est indépendante de l'anisotropie induite mais qu'elle varie avec la composante intrinsèque. Ils montrent aussi que les déformations irréversibles de cisaillement sont fortement influencées par le degré d'anisotropie induite.

Crampin [47] a indiqué que les propriétés anisotropes des roches sont causées par différents facteurs tels que l'alignement des cristaux, les séquences régulières des couches subtiles, les effets des contraintes induites, ou les alignements de fissures. Toutefois, il est très difficile pour les géomatériaux de faire une distinction claire entre l'anisotropie induite et intrinsèque, qui semble rester sur un plan théorique. Il est en effet toujours possible de penser aux caractéristiques microstructurales du matériau responsable de l'anisotropie intrinsèque comme une conséquence de l'histoire des déformations auquel le matériau est soumis.

3.1.2 Modélisation de l'anisotropie : loi de comportement

Pour décrire le comportement anisotrope des géomatériaux, il est nécessaire d'envisager des lois constitutives dans lesquelles on puisse introduire une dépendance des directions préférentielles qui caractérisent l'anisotropie du matériau. Pour cela Boehler [22] suggère d'écrire la loi de comportement de façon générale selon l'équation 3.1.

$$\sigma_{ij} = F(d_{ij}, \zeta_{ij}) \quad (3.1)$$

σ_{ij} représente la contrainte de Cauchy, d_{ij} un chargement et ζ_{ij} un *tenseur de structure* qui traduit les propriétés du matériau responsable de l'anisotropie (Tamagnini [135]). Ce tenseur est caractérisé par des symétries qui coïncident avec celles de la microstructure.

Il est donc possible de classifier un matériau à partir de transformations orthogonales Q_{ij} qui ne font pas changer sa réponse mécanique. Ces transformations formeront le groupe de symétries du matériau s'ils satisfont l'équation 3.2.

$$\hat{\sigma} = F(\mathbf{d}, \mathbf{Q}\zeta\mathbf{Q}^\top) = F(\mathbf{d}, \zeta) = \sigma \quad (3.2)$$

Dans le cadre de l'élastoplasticité, la description de l'anisotropie exige l'introduction d'un ou plusieurs tenseurs de structure qui peuvent être introduits à la fois au niveau des paramètres matériaux et au niveau des variables d'état. Les tenseurs de structure

peuvent avoir des effets sur le comportement élastoplastique du milieu de deux manières différentes :

- En introduisant des paramètres matériaux qui déterminent l'anisotropie au niveau du comportement l'élastique.
- En considérant une surface de charge et un potentiel plastique qui dépendent aussi des tenseurs de structure.

Tamagnini [135] souligne qu'il est ainsi possible de modéliser l'anisotropie intrinsèque et induite. Dans le premier cas, nous envisageons que le tenseur de structure reste constant pendant l'évolution des déformations plastiques. Dans le deuxième, l'anisotropie est décrite en introduisant des tenseurs du deuxième ordre (tenseurs de structure) dans l'ensemble des variables internes afin de modéliser l'évolution de la fonction de charge au cours du processus de déformation.

Dans la section suivante nous décrivons les propriétés de l'argile de Boom, une roche argileuse qui montre un comportement mécanique fortement anisotrope. Afin de modéliser ce matériau, nous présentons dans le chapitre 4 une loi de comportement élastoplastique qui se propose d'introduire l'anisotropie au niveau élastique, en changeant l'élasticité linéaire isotrope en transversalement isotrope. Dans cette approche nous décrivons l'anisotropie de l'argile de Boom de façon purement intrinsèque en supposant que la composante induite est négligeable.

3.2 Les roches argileuses

De façon générale, les roches peuvent être classifiées selon le processus de formation qui les caractérisent. Schématiquement, il est possible d'en envisager trois catégories principales :

- *Roches magmatiques* :
Ce sont des roches qui se forment par refroidissement de magma.
- *Roches sédimentaires* :
Ce sont des roches qui se forment par accumulation de sédiments qui se déposent en couches.
- *Roches métamorphique* :
Ce sont des roches formées par recristallisation de roches sédimentaires et magmatiques sous l'action de la température et de la pression.

Il est donc possible de considérer les roches argileuses comme des roches sédimentaires formées par déposition de couches successives des minéraux argileux qui proviennent de l'altération de roches préexistantes. Elles représentent la catégorie la plus importante des roches sédimentaires, en pourcentage du 50% au 75%. Parmi celles-ci, nous pouvons distinguer les argiles raides, les argiles fortement consolidées, les marnes et les argilites. Excepté les argilites très compactes et très profondes, la plupart des roches argileuses appartiennent à la catégorie des roches tendres (Coll [42]).

Grâce à ses propriétés physiques et mécaniques, l'argile de Boom, en Belgique a été considérée comme un site adapté au stockage des déchets radioactifs. Dans la section qui suit, nous allons présenter les propriétés principales de cette roche.

3.3 L'argile de Boom

L'argile de Boom est une roche argileuse d'origine marine formée au cours de l'ère Tertiaire il y a 30 millions d'années. Ce massif rocheux est situé en Belgique principalement dans le Bassin de la Campine. Une perméabilité très basse, une stabilité depuis des millions d'années et des propriétés de cicatrisation importante font de cette roche une bonne candidate au stockage de déchets radioactifs à l'intérieur de galeries profondes.

L'objectif de ces ouvrages est de protéger la biosphère d'une possible contamination des radionucléides pour que le relâchement des éléments radioactifs puisse avoir lieu sur une échelle de temps compatible avec leur période de décroissance. La figure 3.1 donne une idée de l'incrément de la température dû au chauffage des déchets.

Pour cette raison, le Groupement d'intérêt Économique EURIDICE fondé en 1995 par le SCK-CEN (Centre d'Etude de l'Energie Nucléaire belge) et NIRAS-ONDRAF, a financé plusieurs projets pour mieux comprendre le comportement des roches argileuses.

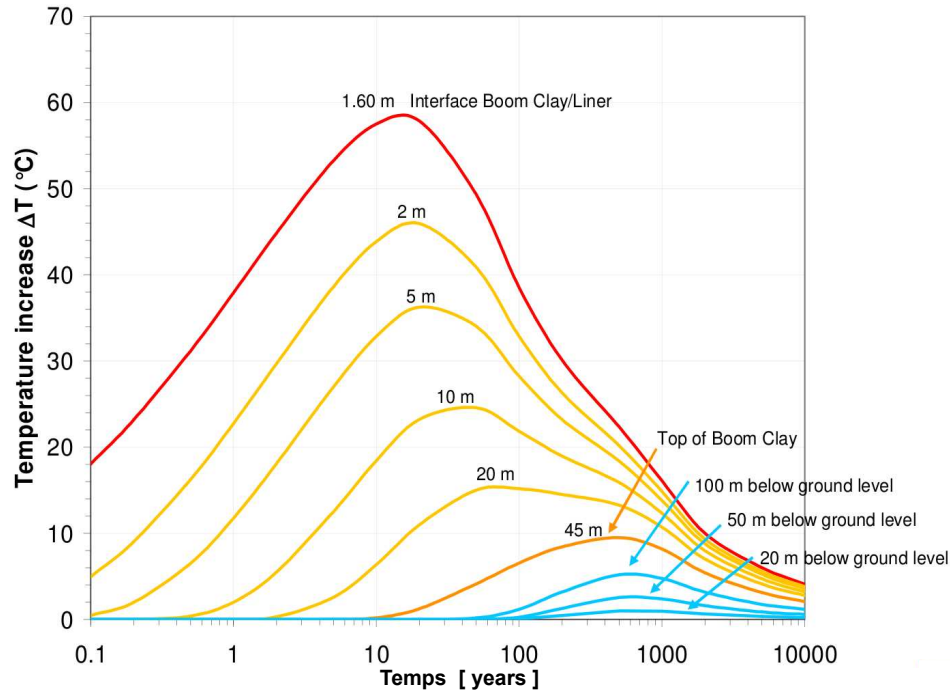


FIGURE 3.1 – Incrément de la température en fonction du temps (First training course, TIMODAZ project 2007)

Un laboratoire de recherche souterrain a été construit dans le site de Mol (figure 3.2) dans une couche de Boom Clay de 110 m, à une profondeur de 223 m.

Une étude bibliographique sur l'argile de Boom a été proposée par Coll [42] dans son travail de thèse. Nous en donnons une brève synthèse afin de donner les lignes générales du comportement hydromécanique de l'argile de Boom.

La composition minéralogique de l'argile de Boom montre des différences significatives selon la profondeur à laquelle les échantillons sont prélevés, qui fait changer les propriétés physiques et mécaniques du matériau. Romero [122], en comparant ces résultats, propose la composition suivante :

- Fraction argileuse 55% :
50% composé d'Illite, 30% de Smectite, interstratifiés d'Illite-Smectite et des Kaolinites d'environ 10%.
- Fraction non argileuse 25% :
essentiellement composée de quartz et de feldspath.
- Pyrite, calcite et carbonate en faible quantité.

L'analyse au microscope électronique (Dehandschutter et al. [51]) combinée à l'analyse

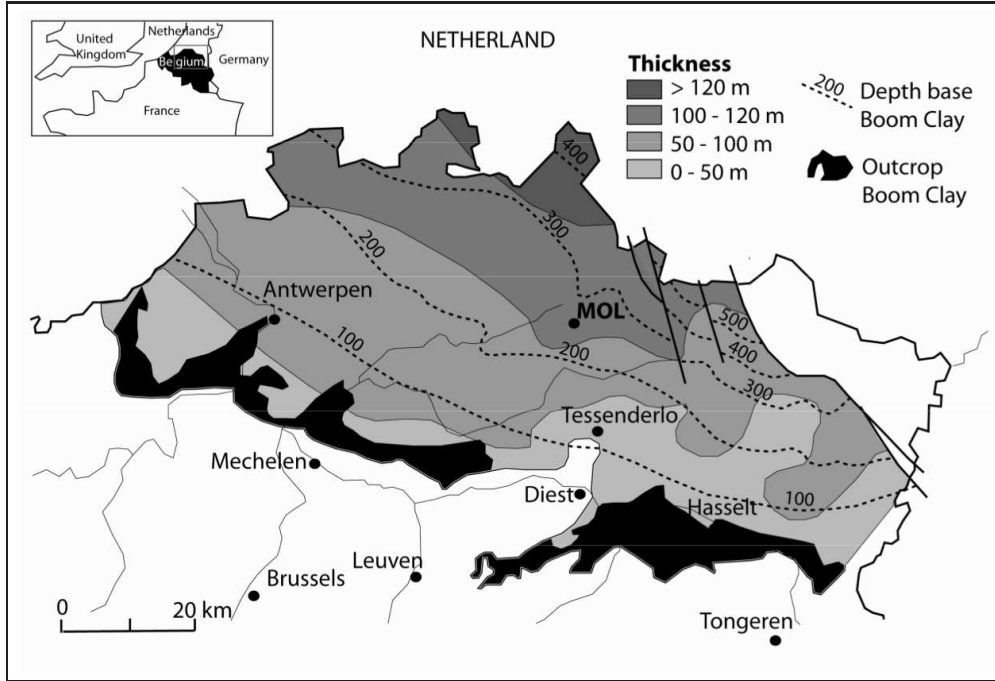


FIGURE 3.2 – Site de Mol : massif rocheux de Boom Clay

des courbes de distribution des tailles de pore (essais au porosimètre mercure) montre que l'argile de Boom est un matériau non cimenté, légèrement surconsolidé et dont les particules sont alignées de manière préférentielle parallèlement à la stratigraphie. L'argile de Boom se caractérise par un comportement plastique, raide, surconsolidé, très peu perméable et ayant un fort potentiel de gonflement. Les propriétés physiques et hydromécaniques sont présentées dans le tableau 3.3 suite à plusieurs travaux expérimentaux faits par Horseman et al. [83], Baldi et al. [10] Bernier et al. [19].

L'état de contrainte lithostatique à la profondeur du laboratoire de Mol est de $\sigma_v = 4.5$ MPa avec un coefficient de pression des terres au repos de $k_o = 0.9$ à une pression hydrostatique de $p_w = 2.2$ MPa (Selfrac report [43]). La valeur des limites d'Atterberg indique que l'argile de Boom est de consistance très plastique. L'indice de liquidité vaut en moyenne 0 ce qui indique que l'argile naturelle est raide. L'argile de Boom est caractérisée par une très faible perméabilité ; le temps pour atteindre une consolidation complète d'un échantillon peut donc être très long. Il varie d'une semaine pour un essai de compression isotrope de 2.3 MPa jusqu'à plus d'un mois pour des valeurs de la contrainte plus élevées (Horseman [83]). En étudiant le comportement volumique en fonction de la contrainte de consolidation pour des chemins de compression œdométrique et isotrope, il est possible de faire les considérations suivantes :

- L'argile de Boom est caractérisée par un gonflement important aux faibles contraintes.

Propriétés HM	Module de Young [MPa]	200-400
	Coefficient Poisson	0.125
	Cohésion [kPa]	300
	Angle de frottement [°]	18 – 24
	Angle de dilatance [°]	0 – 10
	Résistance à la compression simple [MPa]	2
	Porosité (%)	39
	Permeabilité intacte (conditions in situ) [m ²]	$2 \cdot 10^{-19}$ - $4 \cdot 10^{-19}$
	Teneur en eau (%)	22-27
Limites d'Atterberg	Limite de plasticité (%)	23-29
	Limite de liquidité (%)	55-80
	Indice de plasticité (%)	32-51

FIGURE 3.3 – Propriété physique et hydromécanique de l'argile de Boom à l'état naturel (z=223m)

- Le comportement surconsolidé et normalement consolidé est clairement défini.
- Le domaine surconsolidé est caractérisé par des déformations irréversibles assez faibles jusqu'à des niveaux de contrainte de l'ordre de 10 MPa.

Plusieurs essais de compression œdométrique ont été réalisées par Horseman [83] sur des échantillons prélevés à 247 mètres de profondeur en faisant des cycles de charge-décharge. Une pression de consolidation moyenne de l'ordre de 6 MPa et un OCR de 2.4 ont été déterminés. Ces essais ont permis d'obtenir un coefficient de compressibilité à la charge moyenne C_c et un coefficient de gonflement moyen C_s de $C_c = 0.41$ et $C_s = 0.1$ respectivement. Toutes les études mettent en évidence des déformations volumiques négatives dues au gonflement du matériau pour des faibles niveaux de contrainte œdométrique et isotrope.

Les essais de compression triaxiale présentés dans la littérature indiquent que le comportement à la rupture de l'argile de Boom naturellement saturée dépend fortement du niveau de la contrainte moyenne effective initiale p'_0 , des conditions de drainage et de la structure. En conditions drainées et à basse contrainte, la courbe présente un pic au-delà duquel la déviateur chute jusqu'à une valeur résiduelle. Le comportement volumique est initialement dilatant puis contractant dans la zone post-pic. Lorsque p'_0 augmente, le pic du déviateur des contraintes est de moins en moins marqué et un comportement à plateau se développe (figure 3.5).

En conditions non-drainées, la courbe déviateur-déformation axiale présente un pic marqué même pour des états de contrainte effective isotrope élevée. Baldi et al. [10] n'observent plus de radoucissement au-delà-de 3.77 MPa alors que Horseman et al. [83] obtiennent encore un pic très marqué pour $p'_0=5.42$ MPa. Les deux campagnes expéri-

mentales ont été réalisées sur des échantillons provenant de différentes profondeurs ce qui peut là encore expliquer les différences observées.

Dans les essais triaxiaux réalisés par Horseman, Baldi et Coop, on observe systématiquement deux plans de cisaillement à une orientation moyenne de 49° et 40° . Une analyse ultérieure au microscope électronique révèle une réorientation des particules d'argile le long des plans de cisaillement. L'épaisseur des bandes de cisaillement varie de $40\text{ }\mu\text{m}$ à $100\text{ }\mu\text{m}$.

Piriyakul [117] a proposé une campagne expérimentale (essais triaxiaux) afin de caractériser le comportement élastique de l'argile de Boom en petites déformations (déformations inférieures à $10^{-3}\%$). Certains résultats sont montrés en figure 3.4. Les échantillons ont été prélevés sur le site de Sint-Katelijne-wave en Belgique où une couche d'argile affleure en surface de façon homogène.

Étant donné que l'élasticité transversale peut bien décrire le comportement réversible de cette roche, les modules de Young, les modules de cisaillement et les coefficients de Poisson ont été mesurés en utilisant des jauges et des bender-éléments.

Par la suite, avec plusieurs essais réalisés avec différents parcours de chargement, Piriyakul mesure l'évolution des paramètres élastiques de l'anisotropie transversale en fonction du taux de déformation en montrant un comportement fortement non-linéaire déjà dans un régime de petites déformations.

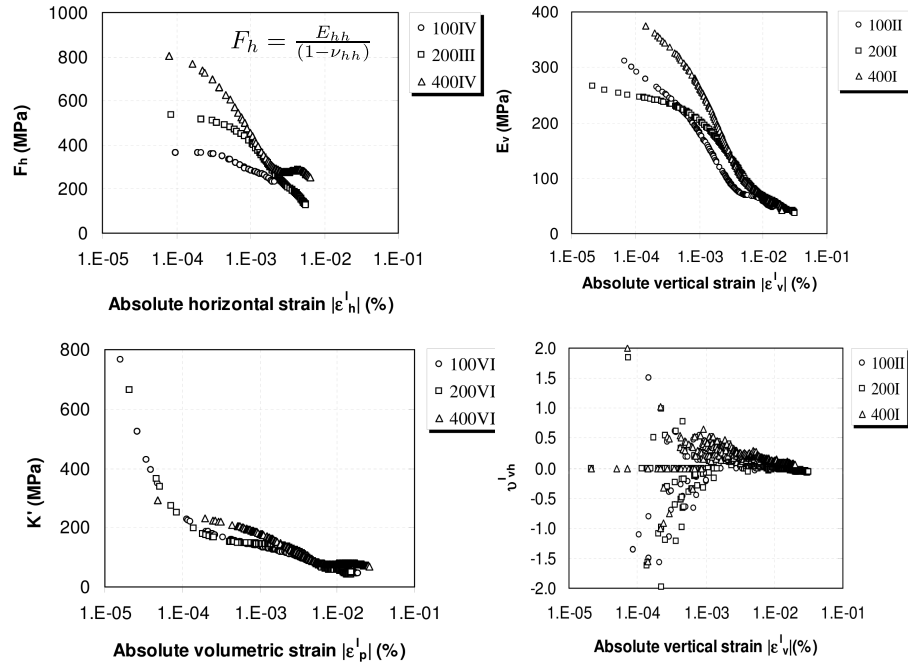


FIGURE 3.4 – Résultat obtenus par Piriyakul K. [117]

Ces résultats confirment que l'anisotropie transversale peut bien être prise en compte pour modéliser le comportement de l'argile de Boom. En négligeant la forte non-

linéarité en régime élastique dans la partie III, l'élasticité linéaire transversale est considérée dans le cadre d'une loi de comportement élasto-plastique.

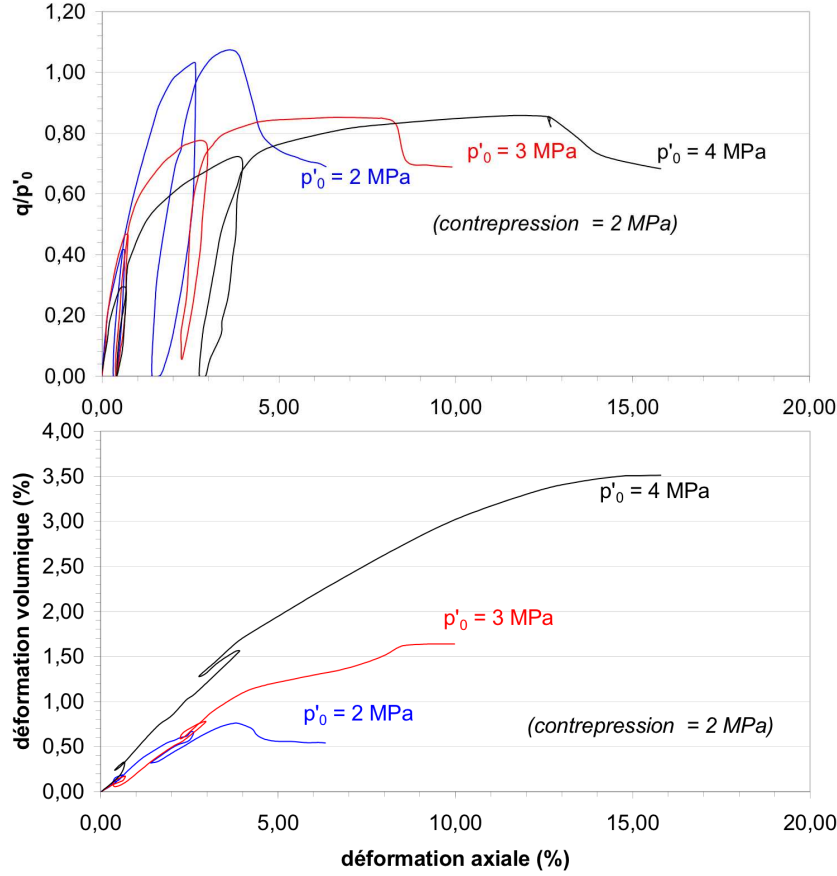


FIGURE 3.5 – Essais de compression triaxiale drainés sur l'argile de Boom : $v_{déplac} = 0.001$ mm/min, $H_O = 7.6$ cm (Baldi et al. [10]).

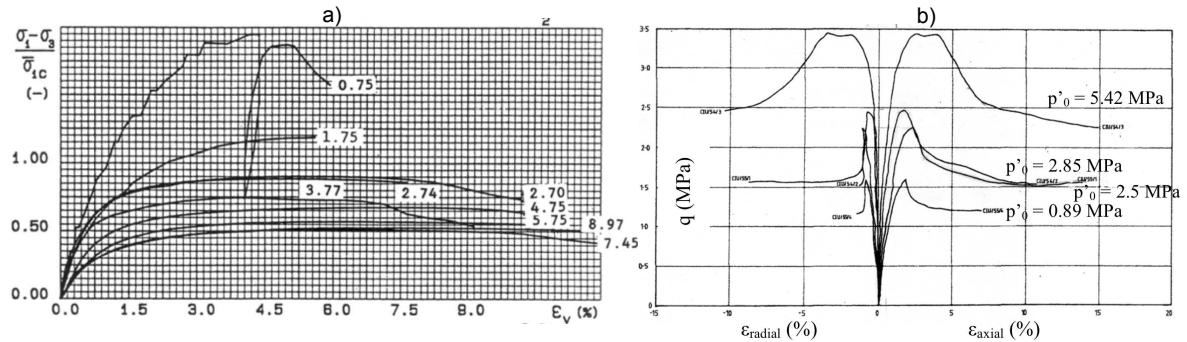


FIGURE 3.6 – Essais de compression triaxiale drainés sur l'argile de Boom : a) Échantillon prélevé à 240m (Baldi [10]), b) Échantillon prélevé à 247m (Horseman [83]).

3.4 Résultats expérimentaux sur un cylindre creux

Grâce à ses propriétés mécaniques et hydrauliques, l'argile de Boom a été considérée comme une des possibles candidates pour accueillir le stockage des déchets radioactifs dans des galeries profondes. La réalisation de ces galeries profondes provoque une variation considérable des propriétés hydromécaniques de la roche hôte qui peut mettre en doute la sûreté du stockage. Tsang et al. [140] schématisent la réalisation de cet œuvre en considérant quatre étapes successives :

1. L'excavation du forage déclenche la propagation de discontinuités en terme de fractures en cisaillement et joints en tractions. La zone intéressée par ces phénomènes d'endommagement (EDZ) est celle caractérisée par une majeure modification des propriétés hydromécaniques de la roche.
2. À cause de la ventilation de la galerie, le forage est soumis à une désaturation progressive.
3. Dès que le forage est fermé, la roche subit une augmentation de température durant plusieurs centaines d'années à cause de la présence des déchets radioactifs.
4. La corrosion des conteneurs de déchets provoque une accumulation de gaz.

Le projet européen de recherche Timodaz s'est proposé comme objectif d'étudier le processus d'endommagement et d'écoulement dans les galeries profondes utilisées pour stocker les déchets nucléaires. Dans ces études, l'impact thermique dû à l'émission des radiations des déchets est aussi envisagé.

3.4.1 Le Projet Timodaz

Pour reproduire expérimentalement le comportement de la roche à une échelle de laboratoire, des expériences sur un cylindre creux ont été réalisées par le Laboratoire de Mécanique des Roches (EPFL Lausanne) sur l'argile de Boom. Les détails concernant l'appareil expérimentale sont montrées en figure 3.7. Ces essais permettent d'étudier la zone endommagée autour du forage suite à une décharge de l'intérieur du cylindre creux [90]. Le chargement prévu est divisé en quatre phases (figure 3.8) :

O) État de contrainte *in situ*.

Cette première phase a pour objectif de reporter l'état de contrainte du matériau *in situ*. Cette phase est composée par un chargement initial où on arrive à un état de contrainte $\sigma^{tot} = 4.5$ MPa et une pression d'eau $p_w = 2.2$ MPa. Un temps de consolidation est ménagé pour rétablir l'équilibre hydraulique. À la fin de cette phase l'échantillon est soumis à un état de contrainte purement isotrope.

A) Déchargement du forage.

Pour modéliser la zone endommagée autour du tunnel pendant le creusement, la contrainte totale et la pression d'eau sont déchargés en 70 minutes jusqu'à $\sigma^{tot} = 1.0$ MPa et $p_w = 0.6$ MPa.

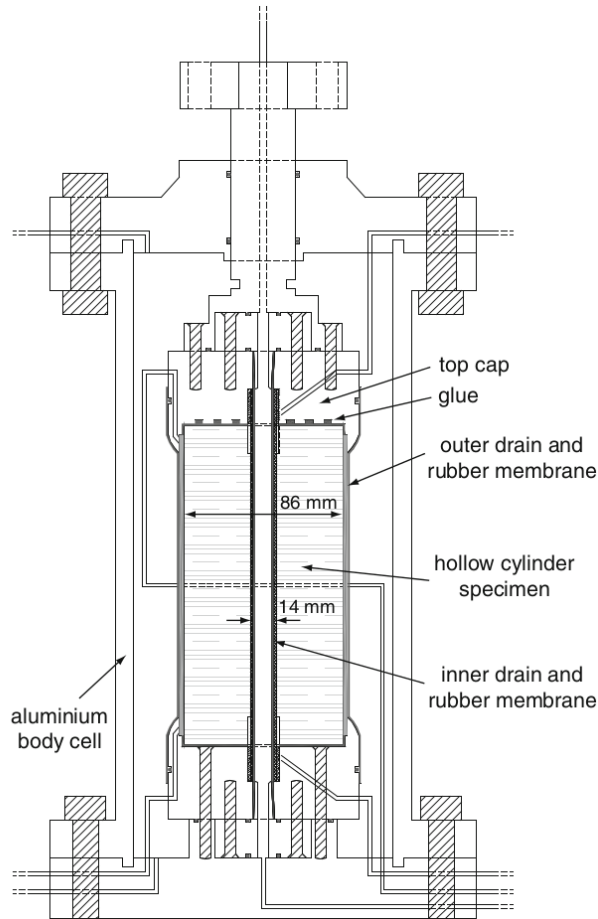


FIGURE 3.7 – Détails de l'appareil expérimentale utilisé pour les expériences sur un cylindre creux (Univeristé de Lausanne (EPFL))

- B) Écoulement fluide : Les conditions de chargement imposées dans la phase précédente sont laissées constantes pour un temps de 11 heures et 20 minutes. De cette façon il est possible de faire dissiper les incréments des pressions d'eau et rétablir de nouveau l'équilibre hydraulique.
- C) Chargement thermique : Après avoir diminué la pression d'eau à l'intérieur du forage ($p_w = 0.1$ MPa), un chargement thermique de 85°C a été prévu pour une heure. Après cette phase, la température à l'intérieur du forage est amenée jusqu'à 20°C en quatre jours.

Sans déplacer l'échantillon, une étude de la perméabilité et une tomographie à rayons X avant et après l'essai est aussi réalisée de telle manière qu'une analyse quantitative des déplacements puisse être faite.

Différents essais ont été réalisés sur l'argile de Boom. Dans tous les cas, la phase C n'a pas pu être appliquée à cause de certains problèmes techniques qui se sont présentés

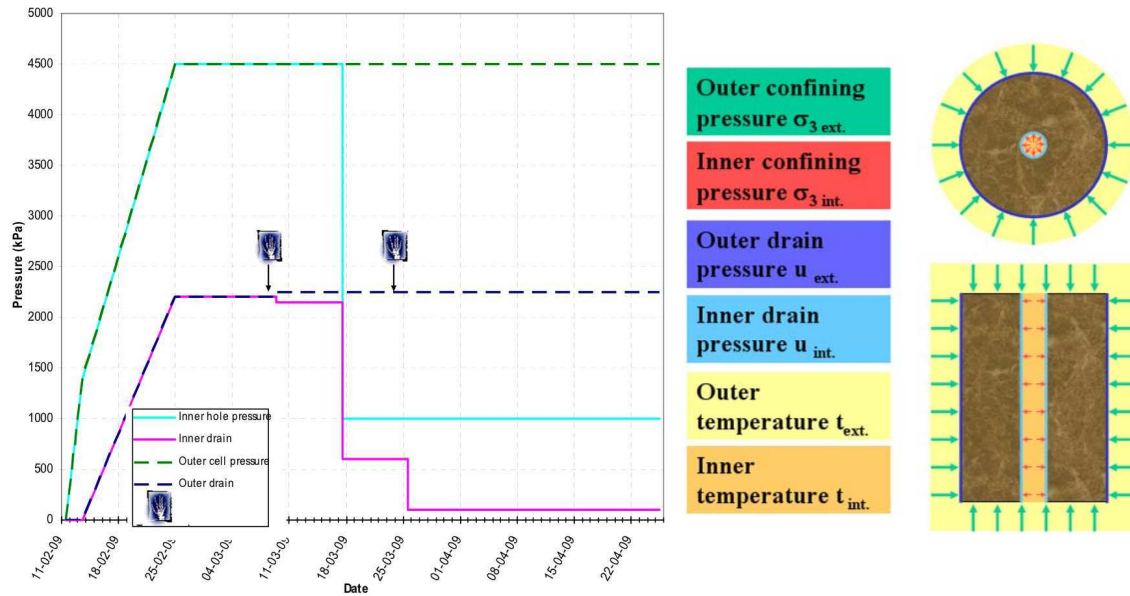


FIGURE 3.8 – Chargement du cylindre creux : essais du laboratoire LMR (EPFL)

sur l'échantillon. Les phases A et B précédemment décrites seront modélisées dans le chapitre 5 de cette thèse.

Chapitre 4

Une loi de comportement Anisotrope

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une loi constitutive ayant pour objectif la description du comportement anisotrope des roches argileuses prévues pour le stockage des déchets radioactifs, notamment l'*argile de Boom*.

C'est le modèle *Plasol* qui a été envisagé afin de modéliser le comportement du matériau avec la théorie de l'élasto-plasticité, modèle qui se base sur un critère de Drucker-Prager avec deux mécanismes d'écrouissages, l'un sur la cohésion et l'autre sur l'angle de frottement. Ces variables évoluent de façon hyperbolique en fonction de la variable interne d'écrouissage, la *déformation plastique équivalente*.

En absence d'une campagne expérimentale sur ce matériau qui puisse bien décrire l'évolution de la réponse anisotrope de l'argile de Boom, nous avons choisi de modéliser le comportement anisotrope de cette roche en changeant la partie élastique du modèle Plasol. Initialement isotrope, elle a été modifiée en transversalement isotrope alors que tout a été conservé dans la modélisation du comportement plastique. Puisque le tenseur élasto-plastique est calculé à partir du tenseur élastique la réponse mécanique globale du milieu présente des caractères anisotropes.

Ce chapitre est composé de sept sections. La première section présente les aspects généraux de l'élasto-plasticité afin d'aboutir à une meilleure compréhension du modèle utilisé dans ce cadre. Dans les deuxième et troisième parties nous décrivons en détail le modèle élasto-plastique *Plasol* et son implémentation dans le code aux éléments finis Lagamine. La quatrième section est dédiée aux aspects numériques de l'intégration de la loi de comportement. Dans la cinquième et la sixième partie nous présentons de façon générale l'élasticité transversalement isotrope et les changements théoriques et numériques dans la loi *Plasol*. Dans la dernière section nous validons l'implémentation des changements faits avec des calculs homogènes.

4.2 Quelques rappels sur l'élasto-plasticité en petites déformations

Sont introduites dans cette section et afin de présenter le modèle élasto-plastique utilisé, les hypothèses et les équations de base de la théorie de l'élasto-plasticité formulée par Hill en 1950 [78].

4.2.1 Notions de base

De manière générale nous considérons un phénomène d'écoulement plastique comme un processus irréversible où la réponse constitutive du matériau est caractérisée par l'histoire de la cinématique [139] (équation 4.1).

$$\sigma_{ij} = \mathcal{F}(F(\tau), \tau \in [0, t]) \quad (4.1)$$

Dans l'élasto-plasticité l'histoire de la cinématique est résumée par des variables internes α_i . La réponse mécanique du matériau sera donc caractérisée par l'état de contrainte σ_{ij} et par un ensemble de variables d'écrouissage s_i conjuguées aux variables internes α_i (Lubliner [94], Simo et Hughes [128]). Les hypothèses de base de la théorie de l'élastoplasticité en petites déformations sont les suivantes :

- On suppose que le tenseur de déformations s'écrit selon une décomposition additive de sa partie élastique et de sa partie plastique (équation 4.2) :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (4.2)$$

- L'état de contraintes σ_{ij} dépend de la déformation élastique ϵ^e de façon linéaire :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij}^e = \mathbb{C}_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \quad (4.3)$$

- Afin de définir l'ensemble des contraintes admissibles qui peut être appliqué au matériau nous définissons la fonction f comme suit :

$$f(\sigma_{ij}, s_i) = (\text{Sym}^I \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ainsi nous définissons l'ensemble des contraintes admissibles \mathbb{E}_σ :

$$\mathbb{E}_\sigma = \{(\sigma_{ij}, s_i) \in (\text{Sym} \times \mathbb{R}^m) \mid f(\sigma_{ij}, s_i) \leq 0\}$$

On appelle *domaine élastique* l'ouvert de l'ensemble \mathbb{E}_σ :

$$\text{int}(\mathbb{E}_\sigma) = \{(\sigma_{ij}, s_i) \in (\text{Sym} \times \mathbb{R}^m) \mid f(\sigma_{ij}, s_i) < 0\}$$

I. L'espace des applications linéaires Lin peut être décomposé par sa partie symétrique et antisymétrique : $\text{Lin} = \text{Sym} \oplus \text{Skw}$ de telle manière que : $\forall A \in \text{Lin}, A = \text{Sym}(A) + \text{Skw}(A)$. Les sous-espaces Sym , Skw sont définis comme suit : $\text{Sym}(A) = \{A \in \text{Lin} \mid (A + A^t)/2\}$, $\text{Skw}(A) = \{A \in \text{Lin} \mid (A - A^t)/2\}$

et on appelle *critère de plasticité* la frontière de \mathbb{E}_σ :

$$\partial \mathbb{E}_\sigma = \{ (\sigma_{ij}, s_i) \in (\text{Sym} \times \mathbb{R}^m) \mid f(\sigma_{ij}, s_i) = 0 \}$$

Le critère de plasticité permet de séparer les états des contraintes admissibles et non-admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des états auquel le milieu ne peut pas être soumis.

- Pour décrire l'évolution de l'écoulement plastique et des variables d'écrouissage nous introduisons les relations constitutives suivantes :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\gamma} r_{ij}(\sigma_{ij}, s_i) \quad r_{ij} : (\text{Sym} \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \text{Sym} \quad (4.4)$$

$$\dot{s}_i = -\dot{\gamma} h_i(\sigma_{ij}, s_i) \quad s_i : (\text{Sym} \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (4.5)$$

Le tenseur r_{ij} et le vecteur \hat{h}_i donnent la direction de la vitesse de déformations plastiques ($|r_{ij}| \equiv 1$) et l'évolution de l'écrouissage. La variable $\dot{\gamma}$ est une fonction non-négative appelée *multiplicateur plastique*.

Afin de décrire l'évolution de l'écrouissage nous considérons qu'il existe une relation entre s_i et les variables internes α_i . La relation incrémentale 4.5 peut ainsi être réécrite selon l'équation 4.6.

$$s_i = \hat{s}(\alpha_j) \quad \implies \quad \dot{s}_i = \frac{\partial \hat{s}_i}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j = -\dot{\gamma} h_i(\sigma_{ij}, s_i) \quad (4.6)$$

À partir de l'équation 4.6 il est possible d'écrire une relation incrémentale même pour l'ensemble des variables internes α_i .

$$\dot{\alpha}_j = -\dot{\gamma} \left[\frac{\partial \hat{s}_i}{\partial \alpha_j} \right]^{-1} h_i = -\dot{\gamma} \hat{h}_j \quad \text{avec} \quad \hat{h}_j = \left[\frac{\partial \hat{s}_i}{\partial \alpha_j} \right]^{-1} h_i \quad (4.7)$$

L'équation 4.5 sera utilisée pour le calcul du tenseur tangent élasto-plastique \mathbb{C}_{ijkl} proposé dans le paragraphe 4.2.3.

4.2.2 Conditions de Kuhn-Tucker et de cohérence

Pour déterminer si un état de contrainte est admissible pour le milieu étudié, nous considérons les conditions de Kuhn-Tucker reportées ci-dessous (équations 4.8.a, 4.8.b et 4.8.c).

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\sigma_{ij}, s_i) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} f(\sigma_{ij}, s_i) = 0 \quad (4.8)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker represent un critère pour établir une condition nécessaire pour l'écoulement plastique (table 4.1 poin 2).

Les conditions de Kuhn-Tucker ne sont pas suffisantes pour savoir si une accumulation de déformation plastique se vérifie pendant le temps. Pour cela, dans le cas où

l'état de contrainte appartient à la surface de plasticité, il est nécessaire d'envisager les conditions de cohérence (équations 4.9.a, 4.9.b et 4.9.c).

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{f}(\sigma_{ij}, s_i) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} \dot{f}(\sigma_{ij}, s_i) = 0 \quad (4.9)$$

Les différents types de chargement sont présentés dans le tableau 4.1.

<ul style="list-style-type: none"> • <u>Conditions de Kuhn-Tucker</u> 	
- $f(\sigma_{ij}, s_i) < 0 \implies (\sigma_{ij}, s_i) \in \text{int}(\mathbb{E}_\sigma) \implies \dot{\gamma} = 0$,	État Élastique
- $f(\sigma_{ij}, s_i) = 0 \implies (\sigma_{ij}, s_i) \in \partial \mathbb{E}_\sigma \implies \dot{\gamma} > 0$,	★
★ Utilisation des conditions des cohérence	
<ul style="list-style-type: none"> • <u>Conditions des cohérence</u> 	
- $\dot{f}(\sigma_{ij}, s_i) = 0 \implies \dot{\gamma} > 0$	Charge Plastique
- $\dot{f}(\sigma_{ij}, s_i) = 0 \implies \dot{\gamma} = 0$	Charge Neutre
- $\dot{f}(\sigma_{ij}, s_i) < 0 \implies \dot{\gamma} = 0$	Charge-Décharge Élastique

TABLE 4.1 – Conditions de Kuhn-Tucker et de cohérence

4.2.3 Tenseur tangent élasto-plastique

Pour donner une expression explicite du tenseur tangent élasto-plastique, nous supposons que le milieu se trouve dans un état de chargement plastique tel que les conditions de cohérence soient satisfaites. La dérivé du critère de plasticité peut alors s'écrire comme suit :

$$\dot{f}(\sigma_{ij}, s_i) = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial s_i} \dot{s}_i = 0 \quad (4.10)$$

En introduisant la loi de comportement 4.3, la loi d'écoulement 4.4 et l'équation 4.7.a sur l'évolution de l'écrouissage nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{f}(\sigma_{ij}, s_i) &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) - \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial s_i} h_i = \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} r_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_i} h_i \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

De cette manière nous obtenons une expression pour le multiplicateur plastique $\dot{\gamma}$ (équation 4.12.a) et pour le dénominateur H du tenseur tangent élasto-plastique \mathbb{C}_{ijkl} (equation 4.12.b).

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \right) \quad H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} r_{kl} + \frac{\partial f}{\partial s_i} h_i \quad (4.12)$$

En substituant les équations 4.12.a et 4.12.b dans l'équation 4.3 nous obtenons une relation incrémentale entre la contrainte σ_{ij} et la déformation totale ε_{ij} :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= \mathbb{C}_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = \mathbb{C}_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\gamma} r_{kl}) = \\ &= \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{1}{H} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \right) \mathbb{C}_{ijkl} r_{kl} = \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{1}{H} \left(\mathbb{C}_{ijkl} r_{kl} \mathbb{C}_{klij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} = \\ &= \left(\mathbb{C}_{ijkl} - \frac{1}{H} \mathbb{C}_{ijpq} r_{pq} \mathbb{C}_{klmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Nous récrivons l'équation 4.13 en notation compacte.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} \mathbf{r} \otimes \mathbb{C} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbb{C} \mathbf{r} + \partial_{\mathbf{s}} f \cdot \mathbf{h}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.14)$$

Le tenseur tangent élasto-plastique est ainsi défini :

$$\mathbb{C}_{ijkl}^{ep} = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{avec } \dot{\gamma} = 0 \\ \mathbb{C}_{ijkl} - \frac{1}{H} \left(\mathbb{C}_{ijpq} r_{pq} \mathbb{C}_{klmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \right) & \text{avec } \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Une loi de comportement élasto-plastique peut donc être classifiée comme une loi de comportement incrémentale bilinéaire.

4.2.4 Remarque sur l'hypo-élastoplasticité

La théorie de l'élasto-plasticité étant fondée sur l'hypothèse de petites transformations, nous pouvons faire l'approximation qui permet de confondre la configuration initiale avec la configuration déformée ($\Omega_{init} \equiv \Omega_{cour}$). Il est alors possible de montrer mathématiquement que cette théorie est parfaitement consistante d'un point de vue thermodynamique, où nous pourrions donc parler d'*hyper-elastoplasticité*.

Si nous voulons étendre la théorie de l'élasto-plasticité au cadre des grandes transformations sans perdre la consistance thermodynamique du modèle, certaines hypothèses ne peuvent plus être envisagées. Citons par exemple l'hypothèse de *décomposition additive* (équation 4.2) des déformations, à laquelle sera, dans ce cas, substitué l'hypothèse de *décomposition multiplicative* du gradient de transformation F_{ij} (équation 4.16).

$$F_{ij} = F_{ij}^e F_{ij}^p \quad (4.16)$$

Pour décrire proprement l'état du milieu en grandes déformations, il est nécessaire que la variation de la contrainte reliée au gradient du champs de vitesse soit indépendante des rotations rigides ; dans le cas contraire, elles modifieraient l'état de contrainte. La dérivée de Jaumann représente un exemple de dérivée matérielle qui restitue à la

contrainte de Cauchy σ_{ij} son indépendance par rapport aux rotations rigides (équation 4.17),

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\omega}_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj} \quad (4.17)$$

ω_{ij} étant la partie anti-symétrique du gradient de déplacement :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Formuler un modèle élasto-plastique en grandes transformations est très complexe, tant d'un point de vue de la formulation analytique que de l'implémentation numérique.

Une approche simplifiée pour l'étude d'un milieu élasto-plastique en grandes déformations consiste à garder l'hypothèse d'additivité des déformations en utilisant une dérivée matérielle objective pour les contraintes (équation 4.17). Cette approche ne permet pas de formuler des modèles parfaitement consistants d'un point de vue thermodynamique. Il est alors possible de parler de l'*hypo-élastoplasticité*.

Pour la modélisation du comportement à rupture des matériaux, comme les métaux, cette inconsistance écarte complètement les prévisions du modèle par rapport aux résultats expérimentaux. En ce qui concerne la description du comportement post-pic des géomatériaux, cette approche semble être suffisamment réaliste.

Les paragraphes suivants présentent la loi constitutive élasto-plastique *Plasol*. Cette loi de comportement est formulée avec toutes les hypothèses de la théorie élasto-plastique en petites déformations mais l'implémentation est réalisée dans un code en grandes déformations. La loi de comportement Plasol est donc encadrée dans un contexte d'*hypo-élastoplasticité*.

4.3 Modèle à frottement interne : Plasol

4.3.1 Loi constitutive Plasol

La loi constitutive *Plasol*, implémentée dans Lagamine (code aux éléments finis, Université de Liège) par Jean-Dominique Barnichon [13] est caractérisée par un comportement élastique de type linéaire isotrope et un critère de plasticité Drucker-Prager (équations 4.18 et 4.22).

$$\mathbb{C}_{ijkl} = 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}^{\text{II}} \quad (4.18)$$

L'équation de Drucker-Prager [56] représente un cône dans l'espace des contraintes principales (figure 4.2). Sa surface de plasticité se différencie par le critère de Von Mises grâce à la dépendance de la contrainte moyenne, une caractéristique importante constituantes des géomatériaux. L'équation de ce critère est la suivante :

$$f = \|\hat{\sigma}\|^{\text{III}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{6 \sin \phi_C}{(3 + A \sin \phi_C)} \right] p - \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{6 c \cos \phi_C}{(3 + A \sin \phi_C)} \right] \leq 0 \quad (4.19)$$

Nous remarquons que selon la valeur du paramètre A , nous obtenons la coïncidence des modèles Drucker-Prager et Mohr-Coulomb (figure 4.1), à la fois pour un chemin de compression mono axial ($A=-1$) et un chemin de traction mono-axial ($A=1$) [126], [32]. $\hat{\sigma}_{ij}$ et p représentent respectivement la partie déviatorique de la contrainte et

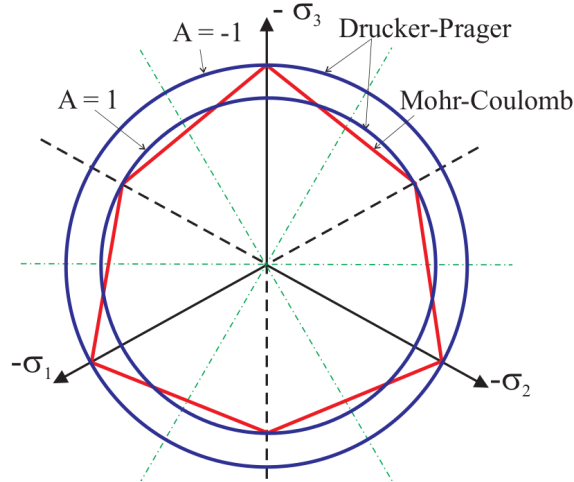


FIGURE 4.1 – Comparaison entre la surface de plasticité de Drucker-Prager et Mohr Coulomb : plan déviatorique, [32].

la contrainte moyenne. En géomécanique l'équation 4.19 peut souvent se récrire en

II. Le symbole δ_{ij} est appelé symbole de Kronecker. Il représente le tenseur identité I pour les vecteurs de l'espace euclidien \mathfrak{S} de telle manière que $I_{ij}v_j = v_i$, $\forall v_i \in \mathfrak{S}$. Il vaut $\delta_{ij} = 1$ si les indices sont coïncidents $i \equiv j$ ou il vaut zero $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

III. Le symbole $\|\bullet\|$ représente la norme euclidienne définie comme suit : $\|A_{ij}\| = \sqrt{A_{ij}A_{ij}}$ ou pour un vecteur de façon équivalente : $\|a_i\| = \sqrt{a_i a_i}$

fonction du premier invariant de la contrainte I_σ et du deuxième invariant du déviateur de la contrainte J_σ . Ces invariants sont définis comme suit :

$$I_\sigma = \sigma_{ii} \quad \Longrightarrow \quad I_\sigma = 3p \quad (4.20)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \text{dev}(\sigma)_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_\sigma}{3} \delta_{ij} \quad \Longrightarrow \quad J_\sigma = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \quad (4.21)$$

Substituant les invariants de la contrainte dans l'équation 4.19 et envisageant que $II_{\hat{\sigma}} = \sqrt{J_\sigma}$, on retrouve la formulation du critère Drucker-Prager utilisé dans *Plasol* (équation 4.22).

$$f = II_{\hat{\sigma}} + m I_\sigma - k \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{2 \sin \phi_c}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi_c)} \\ k = \frac{6 c \cos \phi_c}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi_c)} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

De cette façon l'équation 4.22 peut être reformulée comme suit :

$$\boxed{f = II_{\hat{\sigma}} + m \left(I_\sigma - \frac{3c}{\tan \phi_c} \right) \leq 0} \quad (4.23)$$

L'écoulement plastique est défini à partir d'un *potentiel plastique* $g(\sigma_{ij}, s_i)$:

$$g = II_{\hat{\sigma}} + m^* I_\sigma = 0 \quad \varepsilon_{ij}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\gamma} r_{ij} \quad (4.24)$$

Les fonctions m , m^* différencient le *critère de plasticité* du *potentiel plastique* pour ce modèle. Dans le premier cas, m est fonction de l'angle de frottement $m = \hat{m}(\phi_c)$; dans le deuxième, la fonction m^* dépend de la dilatançe $m^* = \hat{m}^*(\psi)$.

$$m^* = \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3} (3 - \sin \psi)} \quad \psi = \text{dilatance} \quad (4.25)$$

Si $\psi = \phi_c$ alors $m \equiv m^*$ et l'écoulement plastique est défini comme *associé*. Dans le cas contraire ($\psi < \phi_c$) la plasticité est dite *non-associée*. Pour les géomateriaux, la plasticité associée surestime les déformations plastiques volumiques (Wood [154], Vermeer et De Borst [147]) ; habituellement on considère donc une loi d'écoulement non associée. C'est pourquoi dans la loi de comportement *Plasol* on considère un *potentiel plastique* pour décrire les déformations plastiques du milieu.

La relation de Taylor [136] (équation 4.26) est proposée dans cette loi afin d'établir une relation entre l'angle de frottement ϕ_c et la dilatançe ψ . Cette relation est justifiée par des résultats expérimentaux qui montrent une variation de la surface d'écoulement en fonction de l'écoulement plastique.

$$\phi - \psi = \text{constante} \quad (4.26)$$

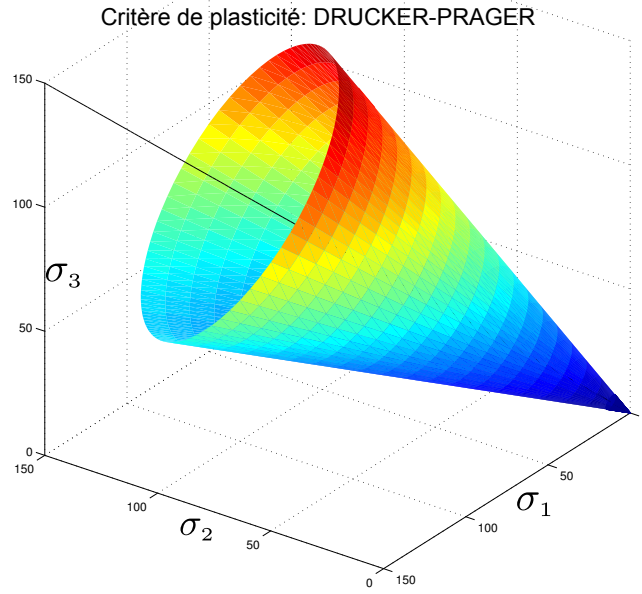


FIGURE 4.2 – Surface du critère de plasticité Drucker-Prager

Dans les calculs présentés au chapitre 5, au lieu d'utiliser l'équation 4.26, une valeur constante de la dilatanse est prise en compte.

La seule variable interne d'écrouissage utilisée dans le modèle est la *déformation plastique équivalente de Von Mises* de sorte qu'on peut parler d'*écrouissage déviatorique*. L'endommagement du matériau est ainsi décrit par cisaillement.

$$\alpha_i = \varepsilon_{eq}^p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt \quad \dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{sij}^p \dot{\varepsilon}_{sij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}_s^p\| \quad \dot{\varepsilon}_{sij}^p = \text{dev}(\dot{\varepsilon}^p)_{ij}$$

L'évolution de la variable s_i , représentant le vecteur des variables d'écrouissage, est modélisée par trois fonctions hyperboliques qui dépendent de la déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Ces fonctions indiquent la règle d'écrouissage qui donne le comportement adoucissant et/ou durcissant sur les angles de frottement ϕ_C , ϕ_E et sur la cohésion c (équation 4.27).

Les variables ϕ_C , ϕ_E , représentent les angles de frottement respectivement pour des chemins en compression et en extension triaxiale.

$$s(\varepsilon_{eq}^p)_i = \begin{pmatrix} \phi_C = \phi_{C_i} + \left(\frac{\phi_{C_f} - \phi_{C_i}}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \varepsilon_{eq}^p \\ \phi_E = \phi_{E_i} + \left(\frac{\phi_{E_f} - \phi_{E_i}}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \varepsilon_{eq}^p \\ c = c_i + \left(\frac{c_f - c_i}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \right) \varepsilon_{eq}^p \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Les paramètres ϕ_{C_i} , ϕ_{E_i} et c_o représentent les valeurs initiales tandis que ϕ_{C_f} , ϕ_{E_f}

et c_f sont les valeurs finales des paramètres d'écrouissage. On peut ainsi modéliser à la fois un mécanisme durcissant et un mécanisme adoucissant. Les coefficients B_c et B_p correspondent respectivement à la valeur de la déformation plastique équivalente pour laquelle la moitié de l'évolution de la cohésion et de l'angle de frottement est achevé (figure 4.3). Étant donnée la géométrie conique de la surface de plasticité, il est

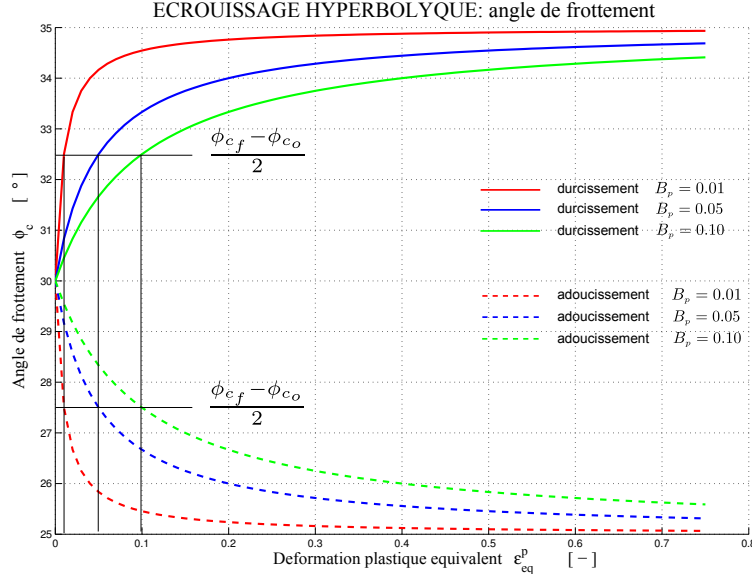


FIGURE 4.3 – Règle d'écrouissage pour l'angle de frottement : cas adoucissant et durcissant

possible de montrer qu'il existe une relation entre l'angle de frottement en compression ϕ_C et l'angle de frottement en traction ϕ_E , relation bien détaillée dans les travaux de Barnichon [13] et Derues [53].

Afin de montrer cette dépendance, nous définissons le *rayon réduit* r comme la tangente du demi-angle au sommet α pour un critère de plasticité de Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales (équation 4.28).

$$r = \tan \alpha = \frac{\sqrt{S^2 - L^2}}{L} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \\ L^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{cases} \quad (4.28)$$

Envisageant un état de compression et un état d'extension axisymétriques, nous calculons les deux rayons réduits (équations 4.29, 4.30).

$$r_c = \sqrt{2} \frac{\sigma_a - \sigma_l}{\sigma_a + 2\sigma_l} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_a \\ \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_l \end{cases} \quad (4.29)$$

$$r_e = \sqrt{2} \frac{\sigma_l - \sigma_e}{\sigma_e + 2\sigma_l} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_e \\ \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_l \end{cases} \quad (4.30)$$

Les angles de frottement ϕ_C , ϕ_E sont définis dans le plan de Mohr et s'expriment respectivement par :

$$\sin \phi_C = \frac{\sigma_a - \sigma_l}{\sigma_a + \sigma_l} \quad \sin \phi_E = \frac{\sigma_l - \sigma_a}{\sigma_a + \sigma_l} \quad (4.31)$$

Utilisant les équations 4.29.a, 4.30.a avec les équations 4.31.a, 4.31.b nous pouvons en déduire les rayons réduits en extension et en compression :

$$r_C = \sqrt{2} \frac{2 \sin \phi_C}{3 + \sin \phi_C} \quad r_E = \sqrt{2} \frac{2 \sin \phi_E}{3 + \sin \phi_E} \quad (4.32)$$

Le plan déviatorique du critère Drucker-Prager est représenté par un cercle qui nous permet donc de trouver une expression de ϕ_E en fonction de ϕ_C .

$$\boxed{\sin \phi_E = \frac{3 \sin \phi_C}{3 - 2 \sin \phi_C}} \quad (4.33)$$

L'équation 4.33 est représentée en figure 4.4. Nous voyons que si le $\sin \phi_E = 1$, la valeur limite de l'angle de frottement en compression $\phi_C = 36.8^\circ$ correspond à une valeur limite du demi-angle au sommet $\alpha = 35.3^\circ$ pour laquelle le cône devient tangent aux plans (σ_1, σ_2) , (σ_1, σ_3) et (σ_2, σ_3) . Cette limitation est valable à la fois pour des milieux purement frottants et pour des milieux cohérents (Desrues [53] et Mestat [101]).

Barnichon [13] montre aussi que pour un milieu frottant si ϕ_C dépasse sa limite, une surestimation de la contrainte se vérifie, que pour des chemins de compression triaxiale l'état du milieu est toujours élastique. Pour des angles de frottement bas $\phi_C < 20^\circ$, il est raisonnable d'approcher Mohr-Coulomb avec Drucker-Prager alors que quand $\phi_C > 20^\circ$ la différence en contrainte s'agrandit de plus en plus.

4.3.2 État de contrainte au sommet

Le comportement à traction est modélisé par le critère de Drucker-Prager dans la région des contraintes proches du sommet où le premier invariant I_σ est négatif (on considère les compressions comme positives). La valeur qui identifie le sommet est celle pour laquelle $II_{\hat{\sigma}} = 0$ (équation 4.34).

$$I_\sigma = \frac{3c}{\tan \phi_C} \quad (4.34)$$

L'intégration du critère de plasticité peut amener à des problèmes numériques dus au fait que la normale au critère ne peut pas être définie de façon unique. Pour simplifier l'intégration de la contrainte pour des comportements en traction simple, on considère le critère de plasticité de l'équation 4.35 (régime plastique au sommet). Dans ce cas aucune règle d'écrouissage n'est prise en compte.

$$f = I_\sigma - \frac{3c}{\tan \phi_C} = 0 \quad (4.35)$$

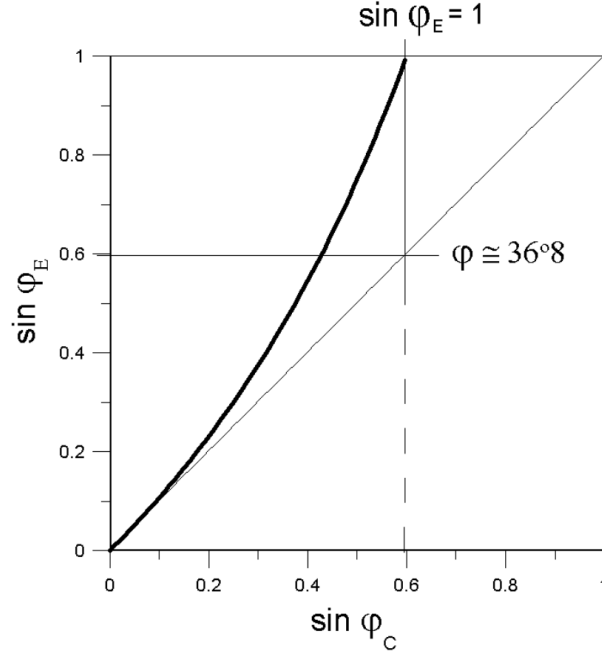


FIGURE 4.4 – Evolution de ϕ_C en fonction de ϕ_E pour Drucker-Prager [53].

Les critères de plasticité comme Drucker-Prager et Mohr-Coulomb pour modéliser le comportement en traction amènent souvent une surestimation des déformations du milieu. Ce problème peut être résolu en coupant le critère de plasticité avec un "cut-off" vertical sur la partie en traction du modèle ou en utilisant d'autres surfaces de plasticité pour la partie en traction.

4.3.3 Essais biaxiaux en régime homogène : loi constitutive Plasol

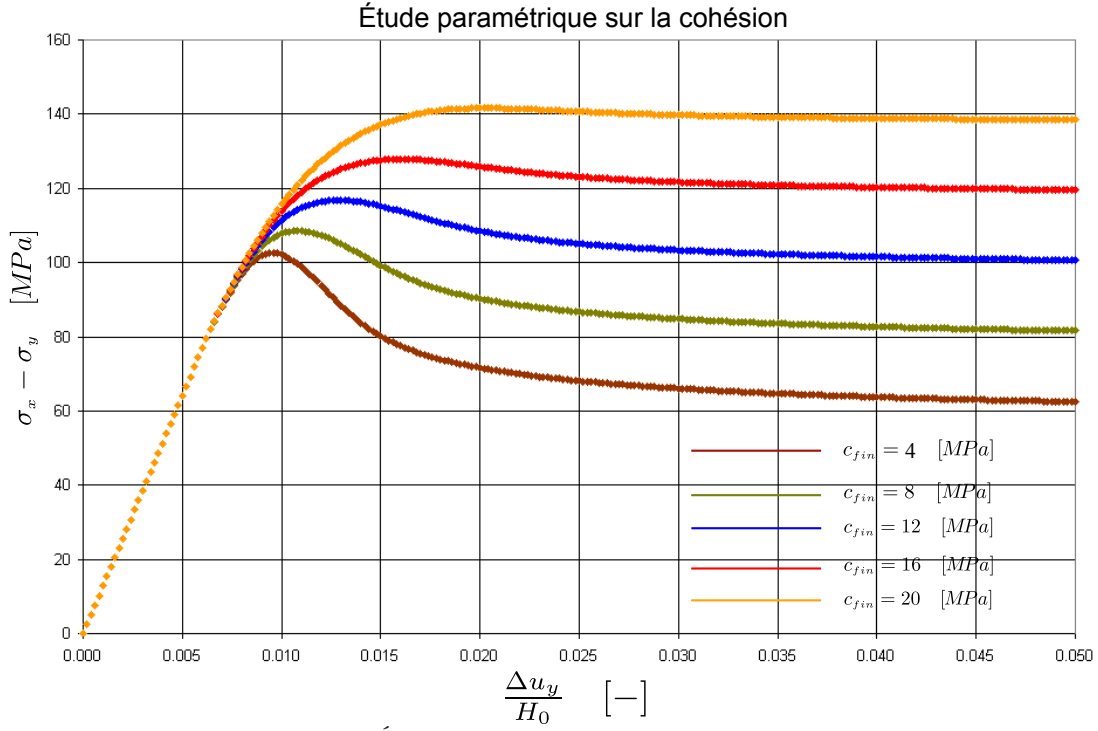
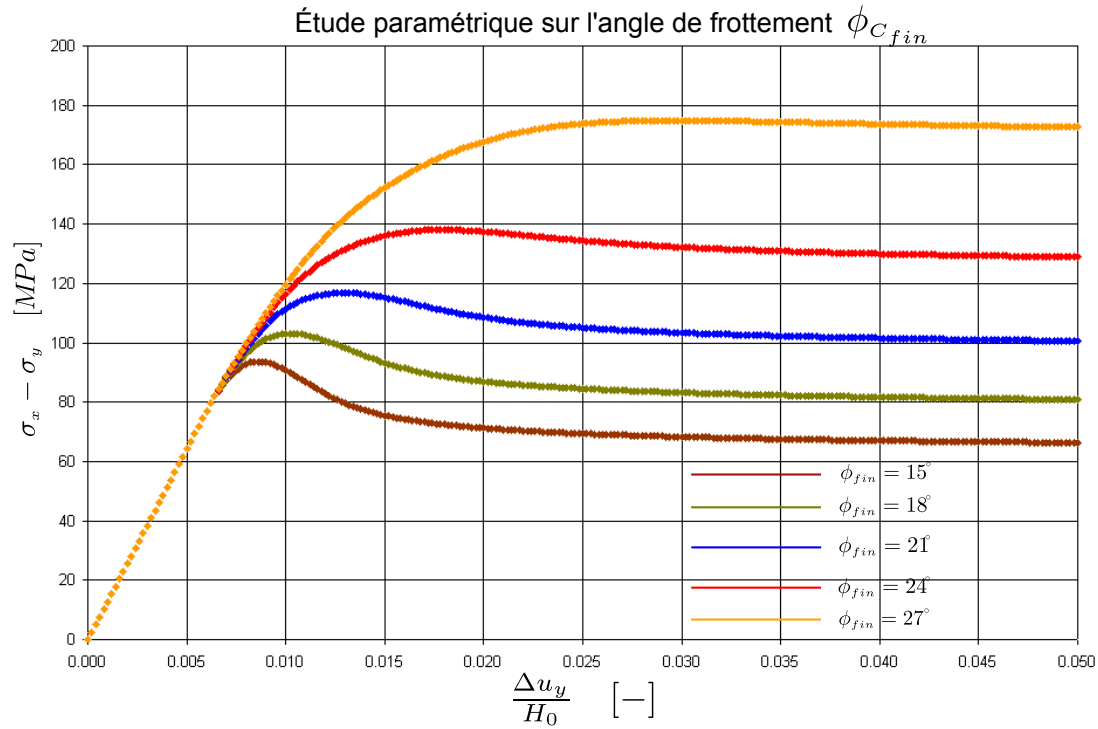
Une étude de sensibilité est proposé par El Moustapha [60] sur la cohésion et l'angle de frottement finals. Dans ces calculs, la loi *Plasol* est utilisée pour des essais biaxiaux à déplacements contrôlés avec une pression de confinement de 20 MPa. Les paramètres mécaniques considérés sont ceux affichés dans le schéma 4.36 où l'unité de mesure du module de Young et de la cohésion est en MPa.

$$\left. \begin{array}{l} E = 12200 \\ \nu = 0.215 \\ \beta_c = 0.005 \\ \beta_p = 0.001 \end{array} \right\} \text{Étude paramétrique} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{a) Cohésion} \\ \hline c_i = 32.5 & \phi_{C_{in}} = 5^\circ & \phi_{C_{fin}} = 21^\circ \\ \hline \text{b) Angle de frottement} \\ \hline \phi_{C_{in}} = 5^\circ & c_{in} = 32.5 & c_{fin} = 12 \\ \hline \end{array} \quad (4.36)$$

Les figures 4.5 et 4.6 montrent le comportement de la loi constitutive dans un état homogène pour différentes valeurs de la cohésion finale c_{fin} et de l'angle de frottement $\phi_{C_{fin}}$.

Pour ces deux cas, l'écrouissage est durcissant pour l'angle de frottement et adoucissant pour la cohésion. L'évolution de la courbe avant et après le pic est donc le résultat de ces deux mécanismes d'écrouissage. Le mécanisme durcissant sur ϕ_C permet de décrire le comportement non-linéaire avant le pic, sans lequel la courbe présenterait un comportement purement élastique.

Comme montré en figure 4.5 et 4.6, si un des deux mécanismes est prédominant par rapport à l'autre la réponse globale du milieu sera adoucissante ou durcissante.

FIGURE 4.5 – Étude paramétrique sur la cohésion finale c_{fin} FIGURE 4.6 – Étude paramétrique sur l'angle de frottement final $\phi_{C_{fin}}$

4.4 Intégration numérique de la loi constitutive

4.4.1 Caractères généraux

Une loi constitutive élasto-plastique peut être représentée par un système d'équations différentielles sous la forme suivante :

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \hat{f}(\sigma_{ij}, s_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}) \quad \dot{s}_{ij} = \hat{g}(\sigma_{ij}, s_{ij}) \quad (4.37)$$

où $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$ représente la dérivée de Jaumann de la contrainte, $\dot{\epsilon}_{ij}$ la vitesse de la déformation et s_{ij} un tenseur des variables d'état qui prennent en compte les effets de l'histoire du chargement. Pour résoudre numériquement le problème, il est nécessaire de calculer σ_{ij}^{t+1} et s_{ij}^{t+1} (contrainte et variables d'état en fin de pas), suivant un parcours des déformations données. Ce calcul peut être fait en suivant un schéma d'intégration pour les équations 4.37.a, 4.37.b qui nous donnent la contrainte pour chaque pas de temps.

L'intégration d'une loi constitutive élasto-plastique est équivalente à la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte. Cette contrainte au sens mathématique est représentée par les conditions de Kuhn-Tucker. L'algorithme utilisé (algorithme de *return mapping*) pour intégrer la loi élasto-plastique *Plasol* se base sur une méthode de prédicteur élastique avec une correction élasto-plastique appliquée quand les conditions d'admissibilité de la contrainte ne sont pas respectées (Simo et Taylor [129], Simo et Hughes [128]).

On pourrait intégrer directement avec un pas la loi de comportement en appliquant l'algorithme de *return mapping* entre le début et la fin du pas. Comme expliqué dans la section 4.4.2 nous préférons aboutir à l'intégration avec des sous-pas. Dans ce cas, en absence d'information sur l'évolution de la géométrie entre le début et la fin du pas, il est nécessaire de faire des hypothèses pertinentes.

Nous supposons généralement que la vitesse des points matériels soit constante au cours du pas. L'intégration de la loi *Plasol* est réalisée avec un gradient de vitesse constante entre le début et la fin du pas. Godinas [74] et Charlier [39] ont montré que cette manière de procéder améliore l'intégration de la loi et évite certains problèmes.

4.4.2 Algorithme d'intégration

L'algorithme d'intégration utilisé est fondé sur une méthode estimant la contrainte à travers un prédicteur élastique. Cette valeur sera alors corrigée si l'état de contrainte ne satisfait pas les conditions d'admissibilité du critère de plasticité. En envisageant un incrément de contrainte d'un état élastique, il est possible de calculer la contrainte en fin de pas σ^B à partir de sa valeur initiale.

$$\Delta\sigma_{ij}^e = \mathbb{C}_{ijkl}\Delta\epsilon_{kl} \quad \longrightarrow \quad \Delta\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^e - \Delta\omega_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}\Delta\omega_{kj} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{ij}^B = \sigma_{ij}^A + \Delta\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$$

Afin de garantir l'objectivité matérielle, l'incrément de contrainte $\Delta\sigma_{ij}^e$ est corrigé avec la dérivé de Jaumann. Une fois calculée une estimation de la contrainte, deux situations sont alors possible :

- *État Élastique*
Si la contrainte σ^B satisfait aux conditions d'admissibilité du critère de plasticité l'état du milieu est élastique donc σ_{ij}^B représente la contrainte en fin de pas.
- *État Plastique*
La contrainte σ_{ij}^B ne satisfait pas aux conditions d'admissibilité donc il est nécessaire de la corriger avec un incrément de contrainte (*correcteur plastique*) qui puisse ramener l'état de contrainte sur la surface de plasticité comme montré en figure 4.7 (algorithme de *return mapping*).

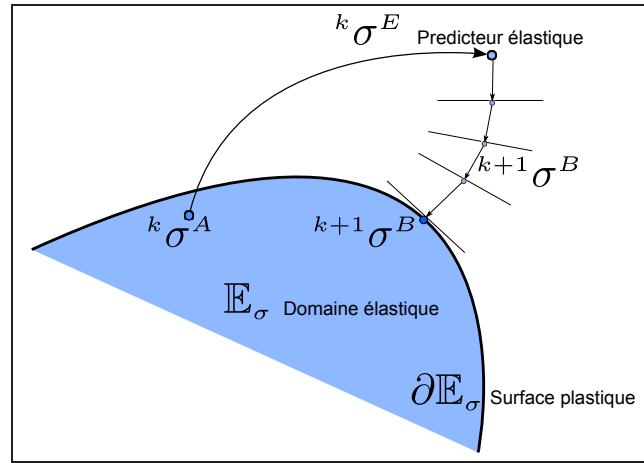


FIGURE 4.7 – Algorithme d'intégration d'une loi de comportement élasto-plastique (flux d'écoulement associé).

Return Mapping

L'algorithme permet de ramener la contrainte sur la surface de plasticité. Cette technique peut être appliquée en faisant des hypothèses sur la direction de l'écoulement plastique nécessaire pour pouvoir atteindre de nouveau le critère. Trois choix principaux sont possibles comme montré en figure 4.8 pour un cas d'écoulement associé en plasticité parfaite :

- *Intégration explicite* :
La normale du potentiel envisagé est celle du point C de la figure 4.8. Cette façon de procéder implique la connaissance de la normale au critère sur le point C dont Charlier [39] a montré une expression analytique pour une surface de plasticité de Drucker-Prager. Cette méthode est stable uniquement pour des incréments de temps petits.

- *Intégration semi implicite* :
 Dans ce cas la normale est celle du point M (point moyen parmi les points E et C). Dans ce cas il est aussi nécessaire de connaître le point C. Cette méthode est inconditionnellement stable.
- *Intégration totalement implicite* :
 Cette méthode nécessite la connaissance de la normale à la fin du pas qui n'est pas a priori connue. C'est pour cette raison que ce schéma est dit totalement implicite. Comme pour le cas précédent il est inconditionnellement stable.

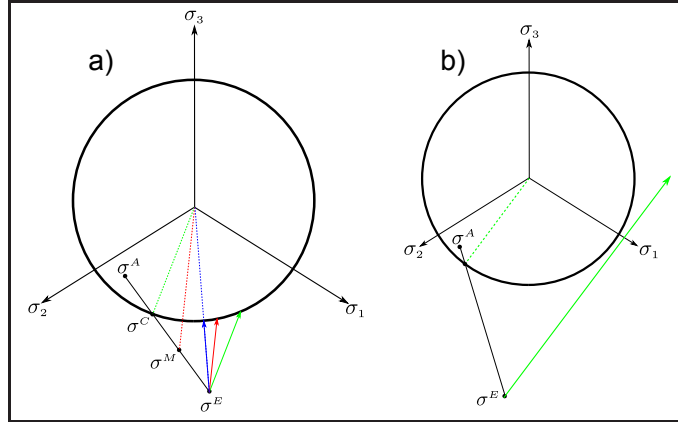


FIGURE 4.8 – Exemple de plasticité associée parfaite : a) Différents choix de la normale n . b) Schéma explicite, cas d'instabilité.

Afin d'appliquer un algorithme de type *return mapping*, la méthode de *cutting plane* proposée par Ortiz and Simo [114] est utilisée.

On linéarise pour cela l'équation du critère de plasticité (équation 4.38) indiquant avec $\Delta\sigma_{ij}^p$ et Δs_i^p respectivement le *correcteur plastique* pour la contrainte et les variables d'écrouissage (équations 4.39.a et 4.39.b).

$$f(\sigma_{ij}^B + \Delta\sigma_{ij}^p, s_i^B + \Delta s_i^p) = f(\sigma_{ij}^B, s_i^B) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^B} \Delta\sigma_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial s_i^B} \Delta s_i^p \quad (4.38)$$

$$\Delta\sigma_{ij}^p = -\mathbb{C}_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl}^p = -\Delta\gamma \mathbb{C}_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}^B} \quad \Delta s_i^p = -\Delta\gamma h_i \quad (4.39)$$

L'équation du critère peut être réécrite en substituant les équations 4.39.a, 4.39.b et en imposant la condition de cohérence :

$$f(\sigma_{ij}^B, s_i^B) - \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^B} \mathbb{C}_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}^B} - \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial s_i^B} h_i = 0 \quad (4.40)$$

Le multiplicateur plastique est ainsi calculé :

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^B} \mathbb{C}_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}^B} + \frac{\partial f}{\partial s_i^B} h_i \quad \Delta\gamma = \frac{f(\sigma_{ij}^B, s_i^B)}{H} \quad (4.41)$$

Une procédure itérative de *return mapping* peut ainsi être démarrée en calculant le correcteur plastique et en vérifiant que les conditions de Kuhn-Tucker sont satisfaites pour chaque itération k .

$${}^{k+1}\sigma_{ij}^B = {}^k\sigma_{ij}^B - \Delta\gamma \left(\mathbb{C}_{ijhl} \frac{\partial g}{\partial {}^k\sigma_{hl}^B} \right) \quad {}^{k+1}s_i^B = s_i^B ({}^k\alpha_j^B) \quad (4.42)$$

Si la plasticité était parfaite, une itération serait suffisante pour satisfaire les conditions de Kuhn-Tucker. Dans le cas contraire (plasticité avec écrouissage) plusieurs itérations sont nécessaires. L'algorithme de résolution est montré dans le tableau 4.2. On impose la condition 4.43 afin d'établir la convergence de l'algorithme :

$$(1 - \text{toll}) < \max \left(\left| \frac{{}^k\Delta\sigma_{11}}{{}^{k+1}\Delta\sigma_{11}} \right|, \left| \frac{{}^k\Delta\sigma_{22}}{{}^{k+1}\Delta\sigma_{22}} \right|, \left| \frac{{}^k\Delta\sigma_{33}}{{}^{k+1}\Delta\sigma_{33}} \right|, \left| \frac{{}^k\Delta\sigma_{12}}{{}^{k+1}\Delta\sigma_{12}} \right| \right) < (1 + \text{toll}) \quad (4.43)$$

Une valeur $\text{toll}=10^{-3}$ est envisagée pour permettre une bonne convergence. Celle-ci est atteinte si on obtient entre deux itérations une variation maximale et inférieure à 0.1 %. Puisque ce critère est adimensionnel il peut être considéré indépendant du problème et du système d'unité.

Nous remarquons que si la partie élastique du modèle avait été caractérisée par une loi non-linéaire, il aurait fallu calculer le tenseur d'élasticité \mathbb{C}_{ijkl} à chaque itération de la procédure d'intégration, à la fois pour l'état élastique et l'état élasto-plastique du milieu.

Technique d'intégration par sous-intervalles

Afin de réaliser des pas de temps aussi grands que possible, une technique d'intégration en sous-intervalles est utilisée dans la loi *Plasol*. Cette technique garantit des résultats satisfaisants en terme de précision et de temps de calcul. Si Δt représente le pas de temps sur lequel nous intégrons la loi de comportement, nous pouvons alors calculer la longueur δt d'un sous-intervalle comme suit :

$$\delta t = \frac{\Delta t}{N_{\text{INT}}} \quad (4.44)$$

où le paramètre N_{INT} représente le nombre de sous-intervalles. Ce paramètre peut être choisi comme constant pendant le temps du chargement et pour chaque point du domaine mécanique. Il est donc nécessaire de réaliser une étude paramétrique pour déterminer la valeur optimale de N_{INT} .

Toutefois, si le milieu présente des bandes de localisation, il est préférable d'utiliser un plus grand nombre de sous-intervalles, dans la bande et un nombre plus petit dans le reste de l'espace puisque le champ de déformation est fortement hétérogène. Wang [152] a proposé une façon de sous-intégrer une loi de comportement avec l'expression 4.45.a.

$$N_{\text{INT}} = 1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_n}{Div} \right) \Delta t \quad \dot{\epsilon}_n = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (4.45)$$

Le paramètre Div est introduit afin de se prémunir d'un nombre de sous-intervalles trop important, pouvant conduire à des calculs trop gourmand en temps de calcul.

$$N_{\text{INT}} = \min \left\{ 1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_n}{Div} \right) \Delta t, \text{VAL}^{\text{lim}} \right\} \quad (4.46)$$

Le choix du paramètre Div et d'une valeur limite VAL^{lim} pour le calcul de N_{INT} dépend de l'expérience numérique. Par défaut dans Lagamine, la valeur de Div est fixée à $5 \cdot 10^{-3}$ et $\text{VAL}^{\text{lim}} = 100$. Néanmoins, pour certains calculs en régime de post-localisation, ces valeurs ont été changées ($Div = 1 \cdot 10^{-3}$, $10E \text{ VAL}^{\text{lim}} = 4000$), (El Moustapha [60]).

4.4.3 Développement analytique pour l'intégration

Pour que la loi de comportement puisse être intégrée numériquement avec un algorithme de *return mapping* il est nécessaire de calculer analytiquement l'expression 4.12.b.

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial f}{\partial s_i} h_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial I_\sigma} \frac{\partial I_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial II_{\hat{\sigma}}} \frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial I_\sigma} = m; & \frac{\partial I_\sigma}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \\ \frac{\partial f}{\partial II_{\hat{\sigma}}} = 1; & \frac{\partial II_{\hat{\sigma}}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{2II_{\hat{\sigma}}} \end{cases}$$

L'équation 4.47 décrit la première partie de la fonction H :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = m \delta_{ij} + \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{2II_{\hat{\sigma}}} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = m^* \delta_{ij} + \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{2II_{\hat{\sigma}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} = 3 m m^* (3\lambda + 2\mu) + \mu = 9 m m^* K + \mu \quad (4.47)$$

en considérant K comme la rigidité volumétrique d'un milieu élastique linéaire isotrope ($K = (2\mu + 3\lambda)/3$). Afin de pouvoir terminer le calcul du dénominateur H , on applique

1. PRÉDICTEUR ÉLASTIQUE

Initialisation de la contrainte et des variables d'écoulement.

$$- {}^k\sigma_{ij}^n = {}^k\sigma_{ij}^{n-1} + \Delta\sigma^e \quad {}^k s^n = s^{n-1} \quad (\text{step } n, \text{ itération } k=0)$$

2. TEST

Calcul du critère de plasticité et test de convergence.

$$- {}^k f^n = f({}^k\sigma_{ij}^n, {}^k s^n) \implies \text{si } {}^k f^n < \text{toll GO TO 8, sinon GO TO 3}$$

3. INITIALISATION

Initialisation de l'écoulement plastique et de l'écoulement.

$$- {}^k r_{ij}^n = r_{ij}({}^k\sigma_{ij}^n, {}^k s^n) \quad {}^k h_i^n = h_i({}^k\sigma_{ij}^n, {}^k s^n)$$

4. MULTIPLICATEUR PLASTIQUE

Calcul de la variation de l'incrément du multiplicateur plastique.

$$- {}^k H^n = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} {}^k r_{kl}^n + \frac{\partial f}{\partial s_i} {}^k h_i^n \quad \delta(\Delta\gamma) = {}^k f^n / {}^k H^n$$

5. MISE À JOUR DES VARIABLES D'ÉCROUISSAGE

Mise à jour des variables internes α_i .

$$- {}^k \Delta\gamma^n = {}^k \Delta\gamma^n + \delta(\Delta\gamma) {}^k \hat{h}_i \quad {}^k \alpha_i^n = {}^k \alpha_i^n + (\Delta\gamma) {}^k \hat{h}_i$$

6. CORRECTEUR PLASTIQUE

Calcul du correcteur élastique.

$$- {}^k \Delta\sigma_{ij}^n = -\mathbb{C}_{ijkl} \delta(\Delta\gamma) {}^k r_{kl}^n \quad {}^k s_i^n = \hat{s}_i({}^k \alpha_j^n)$$

7. REINITIALISATION

Contrainte, critère de plasticité et variables d'écoulement sont recalculés.

$$- {}^k \sigma_{ij}^n = {}^k \sigma_{ij}^n + {}^k \Delta\sigma_{ij}^n \quad {}^k f^n = f({}^k \sigma_{ij}^n, {}^k s^n)$$

$$- {}^k r_{ij}^n = r_{ij}({}^k \sigma_{ij}^n, {}^k s^n) \quad {}^k h_i^n = h_i({}^k \sigma_{ij}^n, {}^k s^n)$$

$$- k=k+1 \implies \text{GO TO 2}$$

8. FIN

Passage au pas suivant :

$$n = n + 1$$

TABLE 4.2 – Algorithme de *return-mapping* d'une loi élasto-plastique (Ortiz et Simo [114]).

l'équation 4.6 à la règle d'écroissage de la loi de comportement *Plasol*.

$$\dot{s}_i = \frac{ds_i}{d\varepsilon_{eq}^p} \dot{\varepsilon}_{eq}^p \Rightarrow \begin{cases} \frac{ds_i}{d\varepsilon_{eq}^p} = \left[\frac{d\phi_c}{d\varepsilon_{eq}^p} \right] = - \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\phi_{c_i} - \phi_{c_f}}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \\ \left(\frac{c_i - c_f}{B_c + \varepsilon_{eq}^c} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{eq}^p}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \right) \end{array} \right] \\ \dot{\varepsilon}_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{s_{ij}}^p \dot{\varepsilon}_{s_{ij}}^p} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3} \text{dev} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)_{ij} \text{dev} \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)_{ij}} = \dot{\gamma} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \dot{s}_i = -\dot{\gamma} \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\phi_{c_i} - \phi_{c_f}}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \\ \left(\frac{c_i - c_f}{B_c + \varepsilon_{eq}^c} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{eq}^p}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \right) \end{array} \right] = -\dot{\gamma} h_i \end{cases} \quad (4.48)$$

En simplifiant l'équation 4.48 on obtient une expression pour h_i qu'on utilisera pour le calcul de la fonction H.

$$h_i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\phi_{c_i} - \phi_{c_f}}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \left(\frac{B_p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p} \right) \\ \left(\frac{c_i - c_f}{B_c + \varepsilon_{eq}^c} \right) \left(\frac{B_c}{B_c + \varepsilon_{eq}^p} \right) \end{array} \right] \quad (4.49)$$

Il ne reste qu'à calculer le gradient de la surface de plasticité selon l'équation 4.50.

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \phi_c} \\ \frac{\partial f}{\partial c} \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \phi_c} = \frac{2I_\sigma}{\sqrt{3}} \left(\frac{\cos \phi_c}{3 - \sin \phi_c} + \frac{\cos \phi_c \sin \phi_c}{(3 - \sin \phi_c)^2} \right) - \frac{6c}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sin \phi_c}{3 - \sin \phi_c} + \frac{\cos^2 \phi_c}{(3 - \sin \phi_c)^2} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial c} = -\frac{3m}{\tan \phi_c} \end{cases} \quad (4.50)$$

L'expression finale de la fonction H est donc la suivante :

$$H = (9m m^* K + \mu) + \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_c} \frac{\partial \phi_c}{\partial \varepsilon_{eq}^p} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \varepsilon_{eq}^p} \right) \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4.51)$$

L'équation 4.51 est utilisée pour résoudre l'algorithme de *return mapping* présenté dans le tableau 4.2. L'expression du correcteur plastique est calculé selon l'équation 4.52 :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij}^p &= -\Delta \gamma \mathbb{C}_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} = -\Delta \gamma (2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) \left(m^* \delta_{kl} + \frac{\hat{\sigma}_{kl}}{2II_{\hat{\sigma}}} \right) \\ \Delta \sigma_{ij}^p &= -\Delta \gamma \left[m^* (2\mu + 3\lambda) \delta_{ij} + \mu \frac{\hat{\sigma}}{II_{\hat{\sigma}}} \right] = -\Delta \gamma \left[3m^* K \delta_{ij} + \mu \frac{\hat{\sigma}}{II_{\hat{\sigma}}} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta\sigma_{ij}^p = -\Delta\gamma \left[3 m^* K \delta_{ij} + \mu \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{II_{\hat{\sigma}}} \right] \quad (4.52)$$

État de contrainte au sommet

Les développements analytiques montrés dans la section 4.4.3 sont aussi proposés pour le comportement en traction pure de la loi *Plasol*. Envisageant le critère de plasticité pour un état de contrainte au sommet (équation 4.35), la fonction H est ainsi calculée :

$$f = I_{\sigma} - \frac{3c}{\tan \phi_C} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \quad H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} = 9 K$$

Ainsi, l'écoulement plastique ne présente pas une partie déviatorique. Les déformations plastiques équivalentes sont donc nulles et aucun mécanisme d'écrouissage est déclenché.

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \quad \implies \quad \text{dev}(\varepsilon_{ij}^p) = 0$$

Afin de choisir quel critère de plasticité il est nécessaire de considérer parmi Drucker-Prager et le critère de l'équation 4.35, on projette l'état de contrainte σ^E sur l'axe hydrostatique en utilisant la droite orthogonale au potentiel plastique. Si l'équation 4.53 est vérifiée nous considérons le critère de l'équation 4.35 qui décrira un régime plastique au sommet.

$$I_{\sigma}^E - m^* II_{\hat{\sigma}}^E > \frac{3c}{\tan \phi_C} \quad (4.53)$$

Le processus expliqué est montrée dans la figure 4.9.

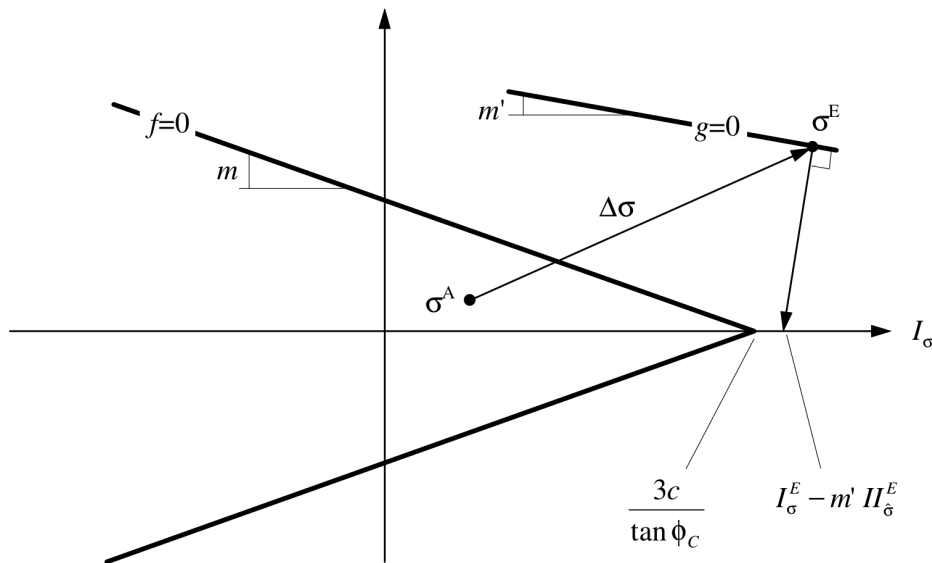


FIGURE 4.9 – État de contrainte au sommet, Barnichon [13].

4.4.4 Implémentation de l'intégration dans Lagamine

L'intégration de la loi constitutive *Plasol* est implémentée dans Lagamine en faisant appel à différentes routines qui sont décrites dans la suite de ce paragraphe. Le noyau de l'algorithme est développé dans les routines *Pla2ea.f* et *Plaint.f*. L'organigramme de la figure 4.10 montre de façon schématisée la démarche de l'implémentation.

- **Loi2.f**

Choix de la loi de comportement.

- **Loi de comportement Plasol : Pla2ea.f**

- a) Calcul de la matrice d'élasticité \mathbb{C}_{ijkl} .
- b) Calcul de N_{int} pour la sous-intégration de la loi de comportement.
- c) Calcul du prédicteur élastique $\sigma_{ij}^E = \sigma_{ij}^A + \mathbb{C}_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}$
- d) Calcul des invariants I_σ et $II_{\hat{\sigma}}$ (routine *Plainv.f*) et test sur le critère ($f \leq 0$).
- e) Intégration de la loi avec le *return mapping* si $f > 0$ (routine *Plaint.f*).
- f) Calcul de la matrice tangente consistante avec une méthode de perturbation.

- **Intégration de la loi Plasol : Plaint.f**

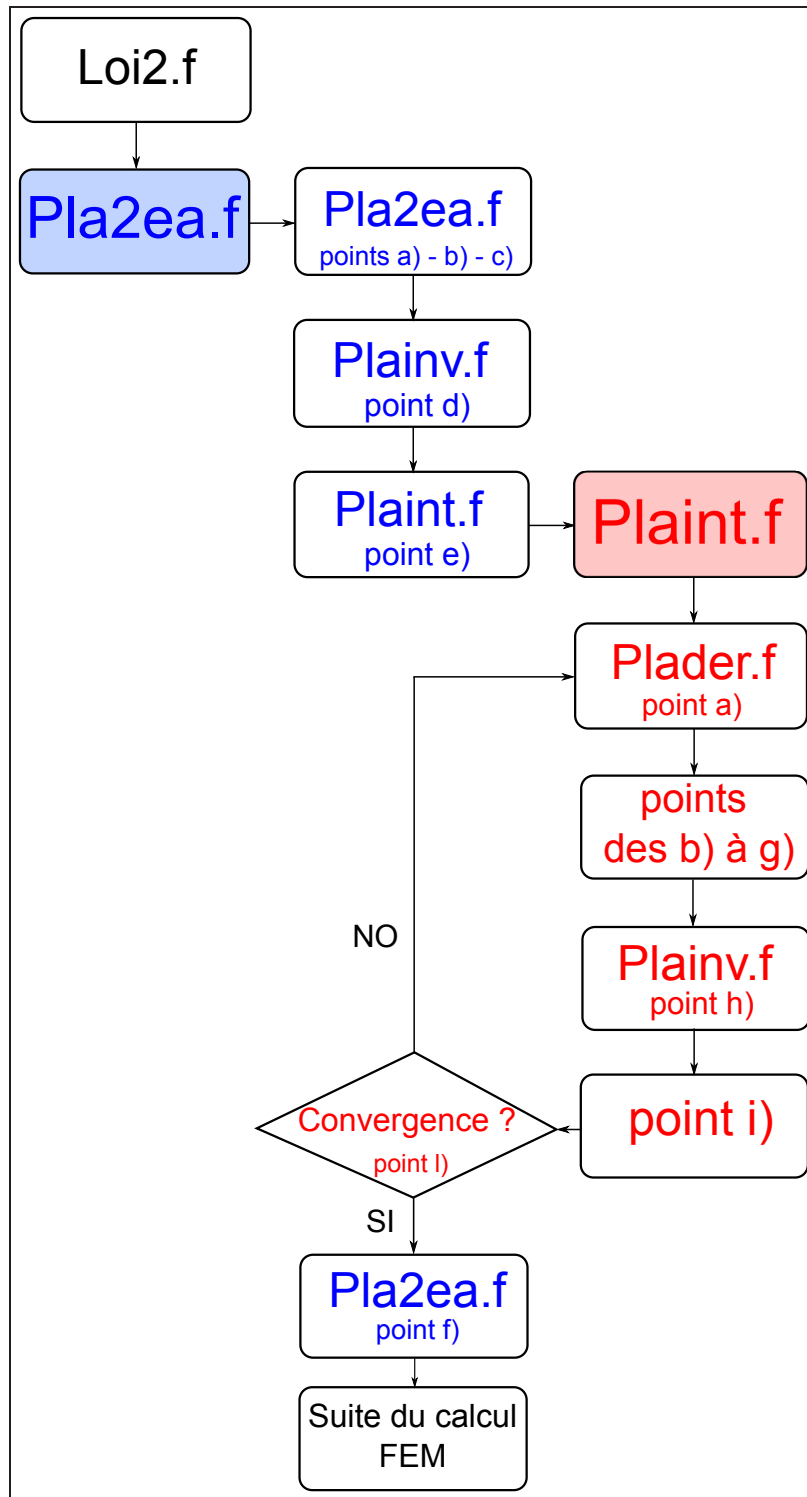
- a) Calcul de H , l'équation 4.51 (routine *Plader.f*)
- b) Calcul de la variation du multiplicateur plastique $\delta(\Delta\gamma) = f/H$
- c) Mise à jour du multiplicateur plastique $\Delta\gamma = \Delta\gamma + \delta(\Delta\gamma)$.
- d) Mise à jour de la déformation plastique équivalente $\varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{eq}^p + (\sqrt{3}/3) * \Delta\gamma$
- e) Mise à jour des variables d'écrouissage $\phi_C = \hat{\phi}_C(\varepsilon_{eq}^p)$, $c = \hat{c}(\varepsilon_{eq}^p)$.
- f) Calcul du correcteur plastique $\Delta\sigma_{ij}^p = -\Delta\gamma (3 m^* K \delta_{ij} + \mu \hat{\sigma} / II_{\hat{\sigma}})$
- g) Mise à jour de la contrainte $\sigma_{ij}^B = \sigma_{ij}^B + \Delta\sigma_{ij}^p$.
- h) Calcul des invariants (routine *Plainv.f*).
- i) Mise à jour du critère $f = f(\sigma_{ij}, s_i)$.
- l) Test sur la convergence du *return-mapping*.

- **Plainv.f**

- a) Calcul des invariants I_σ , $II_{\hat{\sigma}}$ et des coefficients $m = \hat{m}(\phi_C)$, $m^* = \hat{m}^*(\psi)$.

- **Plader.f**

- a) Calcul de la fonction H (équation 4.51).

FIGURE 4.10 – Organigramme de l'implémentation de *Plasol* dans *Lagamine*

4.5 Modèle élasto-plastique anisotrope

Développer un modèle élasto-plastique capable de prédire des déformations plastiques anisotropes du point de vue de la formulation analytique est compliqué et très complexe. Le critère de plasticité ne peut pas dépendre uniquement des invariants de la contrainte mais doit aussi présenter une dépendance par rapport au changement d'orientation de la matière.

Afin de concevoir un modèle pour modéliser le comportement anisotrope d'un matériau tout en gardant la simplicité de la formulation analytique, un choix de la loi élasto-plastique basée sur un critère de Drucker-Prager (Plasol) a été opéré en modifiant la partie élastique en transversalement isotrope.

Même si ce critère de résistance représente une fonction isotrope, la dépendance du tenseur tangent élasto-plastique aux coefficients élastiques donne à la réponse mécanique du matériau un caractère anisotrope. Le choix de l'élasticité transverse est justifié principalement par deux aspects :

- Le comportement anisotrope de certains sols et roches peut être représenté par l'anisotropie transversale en raison du processus de formation par stratifications ou par alignement de la structure interne des ses particules (fissures, cristaux, hétérogénéités).
- L'anisotropie transversale est l'approche la plus simple qui puisse être choisie étant donné que le nombre de paramètres mécaniques indépendants passent de deux (élasticité isotrope) à cinq. L'étude expérimentale de ces paramètres est complexe puisqu'il n'est pas possible d'utiliser des techniques classiques [117]. De plus, même dans un régime de petites déformations, le comportement des géomatériaux est fortement non-linéaire.

4.5.1 Symétries matérielles

De façon expérimentale on observe que pour certains matériaux le comportement mécanique est indépendant des rotations rigides alors que pour d'autre la réponse mécanique est dépendante de certains groupes de rotations.

Si on imagine un essai de compression mono-axial sur une grille composée par des pièces carrés, on observe la même réponse en contrainte par rapport au même essai effectué en tournant l'échantillon de 90 degrés [118]. En répétant le même essai mais en utilisant un matériau composé par couches de différentes natures, le résultat montre une différence de comportement après la rotation du matériau.

Tels exemples montrent que les propriétés constitutives d'un matériau peuvent être caractérisées sur la base des groupes de rotations rigides que l'on appelle *symétries matérielles*.

Considérons la normale n à une surface d'un milieu continu Ω . Soit σ_{ij} et ε_{ij} l'état

de contraintes et de déformations du milieu et σ_{n_i} , ε_{n_i} les vecteurs de contrainte et de déformation pour cette normale n_i .

$$\sigma_{n_i} = \sigma_{ij} n_j \quad \varepsilon_{n_i} = \varepsilon_{ij} n_j \quad (4.54)$$

Considérons une rotation rigide Q_{ij}^{IV} associée au corps Ω de telle manière qu'on puisse définir le vecteur normal n_i^* , la déformation $\varepsilon_{n_i}^*$ et la contrainte $\sigma_{n_i}^*$ dans la configuration tournée.

$$n_i^* = Q_{ij} n_j \quad (4.55)$$

$$\varepsilon_{n_i}^* = Q_{ij} \varepsilon_{n_j} = Q_{ik} \varepsilon_{kj} n_j = [Q_{ik} \varepsilon_{kl} Q_{jl}]_{ij} [Q_{jh} n_h]_j = \varepsilon_{ij}^* n_j^* \quad (4.56)$$

La réponse mécanique du milieu est indépendante de la rotation Q_{ij} si le vecteur de contrainte $\sigma_{n_i}^*$ correspondant à la déformation tournée $\varepsilon_{n_i}^*$ est égal à une rotation de σ_{n_i} , c'est-à-dire $\sigma_{n_i}^* = Q_{ij} \sigma_{n_j}$, (Callari [32]).

$$\sigma_{n_i}^* = Q_{ij} \sigma_{n_j} = Q_{ik} \sigma_{kj} n_j = [Q_{ik} \sigma_{kl} Q_{jl}]_{ij} [Q_{jh} n_h]_j = \sigma_{ij}^* n_j^* \quad (4.57)$$

L'équation 4.57 est donc satisfaite si l'état de contrainte correspondant à l'état de déformations tournées coïncide avec une rotation de l'état de contraintes (équation 4.58).

$$\hat{\sigma}(Q\varepsilon Q^T) = Q\hat{\sigma}(\varepsilon)Q^T \quad (4.58)$$

Le groupe de symétrie matérielle G peut être donc défini selon l'équation 4.59.

$$G := \{Q \in \text{Orth} \mid \hat{\sigma}(Q\varepsilon Q^T) = Q\hat{\sigma}(\varepsilon)Q^T\} \quad (4.59)$$

Chadwick et al. [36] ont montré que les groupes de symétrie sont pour un tenseur élastique au nombre de huit. Pour les matériaux élastiques il est possible d'aborder deux problèmes pour caractériser le milieu :

- Problème de classification : par la connaissance du potentiel élastique on arrive à déterminer le groupe de symétrie matérielle.
- Problème de représentation : par la connaissance du groupe des symétries matérielle on arrive à déterminer le potentiel élastique.

4.5.2 Élasticité transversalement isotrope

L'élasticité linéaire isotrope est caractérisée par un groupe de rotations coïncidant avec tout l'espace de rotations rigides ($G \equiv \text{Rot}^+$). Il est possible de montrer que de tels groupes de rotations correspondent à une expression de la loi élastique linéaire isotrope (équation 4.18) écrite avec deux paramètres mécaniques (les paramètres de Lamé, λ et μ).

IV. Le groupe de rotations Orth est défini comme suit :
 $\text{Orth}^+ := \{Q \in \text{Lin}^+ \mid Q_{ik} Q_{jk} = Q_{ki} Q_{kj} = \delta_{ij}\}$. Lin^+ représente l'ensemble des applications linéaires avec déterminant positif $\text{Lin}^+ := \{F_{ij} \in \text{Lin} \mid \det F > 0\}$.

L'anisotropie transversale représente l'approche la plus simple pour décrire un matériau élastique linéaire anisotrope. Une telle loi est caractérisée par un groupe de rotations rigides égal aux rotations rigides autour d'un axe (*l'axe d'anisotropie*) : dans le plan normal à l'axe d'anisotropie (*plan d'anisotropie*) la réponse du matériau est isotrope.

En envisageant que le vecteur a_i identifie l'axe d'anisotropie, le groupe de symétrie matérielle est représenté par $G \equiv \text{Rot}(a)^+$. Il est possible de montrer qu'à un tel groupe des rotations rigides correspond une expression de la loi caractérisée par sept paramètres mécaniques dont seulement cinq sont indépendants (Podio-Guidugli et Virga [119]). Suite à la figure 4.11, nous considérons le repère orthonormal (O, e_1, e_2, e_3) dont les verseurs e_1, e_2 appartiennent au plan d'anisotropie π et le verseur e_3 appartient à l'axe d'anisotropie ($e_{3_i} \equiv a_i$). À partir de ce repère, local au plan d'anisotropie π , nous définissons un potentiel élastique Ψ (Vogler et al. [150]) :

$$\Psi = \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{ii})^2 + \mu(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\delta_{ij})^2 + \alpha(e_{3_k}\varepsilon_{kl}e_{3_l})\varepsilon_{ii} + 2(\mu_l - \mu_t)(e_{3_k}\varepsilon_{kh}\varepsilon_{hl}e_{3_l}) + \frac{1}{2}\beta(e_{3_k}\varepsilon_{kl}e_{3_l})^2 \quad (4.60)$$

Définissant $D_{3_{ij}} = e_{3_i}e_{3_j}$ comme le tenseur projecteur sur l'axe d'anisotropie, on dérive la contrainte à partir du potentiel Ψ étant la loi de comportement élastique linéaire :

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{D}_3 \mathbf{a}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_3 \mathbf{e}_3 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_t \varepsilon_{ij} + \alpha(\varepsilon_{kk} D_{3_{ij}} + (e_{3_k} \varepsilon_{kl} e_{3_l}) \delta_{ij}) + 2(\mu_l - \mu_t)(D_{3_{ik}} \varepsilon_{kj} + \varepsilon_{ik} D_{3_{kj}}) + \beta(e_{3_k} \varepsilon_{kl} e_{3_l}) D_{3_{ij}} \quad (4.61)$$

Le tenseur \mathbb{C}_{ijkl} de la loi constitutive sera donc :

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda(\delta_{ij}\delta_{kl}) + 2\mu_t\delta_{ik}\delta_{jl} + \alpha(D_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ij}D_{kl}) + 2(\mu_l - \mu_t)(\delta_{ik}\delta_{ml}D_{jm} + \delta_{mk}\delta_{jl}D_{im}) + \beta(D_{ij}D_{kl})$$

et sera en notation compacte :

$$\mathbb{P}_{D_{ijkl}} = \mathbb{I}_{imkl}D_{jm} + \mathbb{I}_{mjkl}D_{im} \quad [\mathbb{P}_D \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Sym} \quad \boxed{\mathbb{C} = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu_t \mathbb{I} + \alpha(\mathbf{D} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{D}) + 2(\mu_l - \mu_t) \mathbb{P}_D + \beta(\mathbf{D} \otimes \mathbf{D})} \quad (4.62)$$

Les paramètres mécaniques de l'équation 4.62 peuvent être exprimés en fonction des modules de Young, des coefficients de Poisson et des modules de cisaillement. L'anisotropie transversale peut être écrite selon la notation de Voigt (notation vectorielle) $\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j$ avec les paramètres de Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement dans le repère (O, e_1, e_2, e_3) de la figure 4.11.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})}{D} & \frac{(\nu_{\pi 3}\nu_{3\pi} + \nu_{\pi})}{D} & \frac{\nu_{\pi 3}(1 + \nu_{\pi})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\nu_{\pi 3}\nu_{3\pi} + \nu_{\pi})}{D} & \frac{(1 - \nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})}{D} & \frac{\nu_{\pi 3}(1 + \nu_{\pi})}{D} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{\pi 3}(1 + \nu_{\pi})}{D} & \frac{\nu_{\pi 3}(1 + \nu_{\pi})}{D} & \frac{(1 - \nu_{\pi}^2)}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{3\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{3\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{(1 + \nu_{\pi})(1 - \nu_{\pi} - 2\nu_{3\pi}\nu_{\pi 3})}{E_{\pi}}$$

En inversant la matrice C_{ij} nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{\pi}} & -\frac{\nu_{\pi}}{E_{\pi}} & -\frac{\nu_{\pi 3}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{\pi}}{E_{\pi}} & \frac{1}{E_{\pi}} & -\frac{\nu_{\pi 3}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{3\pi}}{E_{\pi}} & -\frac{\nu_{3\pi}}{E_{\pi}} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{3\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{3\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{\pi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

La symétrie de la matrice C_{ij}^{-1} (équation 4.64.a) et le comportement isotrope sur le plan π (équation 4.64.b) permettent d'écrire l'équation 4.63 avec cinq paramètres indépendants.

$$\frac{\nu_{\pi 3}}{E_3} = \frac{\nu_{3\pi}}{E_{\pi}} \quad G_{\pi} = \frac{E_{\pi}}{2(1 + \nu_{\pi})} \quad (4.64)$$

Tous les paramètres de l'équation 4.62 peuvent être écrites en fonction des paramètres de l'équation 4.63 et viceversa comm'il est bien détaillé dans Vogler et al. [150].

Imaginons un semi espace indéfini pour un milieu transversalement anisotrope dont le plan d'anisotropie π est incliné d'un angle α par rapport à un repère global

(O, e_x, e_y, e_z) (figure 4.11). Deux repères différents peuvent être définis : un repère parallèle au plan π (O, e_1, e_2, e_3) et un autre global (O, e_x, e_y, e_z) . Afin de décrire le comportement du milieu dans le repère global (O, e_x, e_y, e_z) un changement de base de la loi constitutive \mathbb{C}_{ijkl} est nécessaire. Les calculs de ce changement de base ont été faits à la fois en notation tensorielle et en notation vectorielle. Dans les équations qui suivent nous utilisons l'exposant z pour indiquer qu'elles sont écrites dans la base (O, e_x, e_y, e_z) . Tous les détails algébriques de ces calculs sont reportés dans l'annexe A.

Notation vectorielle

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & +2 \cos \alpha \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\sigma_i^z = (T_{ih} C_{hk} T_{kj}^{-1}) \varepsilon_j^z \quad \boxed{C_{ij}^z = (T_{ih} C_{hk} T_{kj}^{-1})} \quad (4.65)$$

Notation tensorielle

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \boxed{\mathbb{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^z = R_{\alpha i} R_{\beta j} R_{\gamma k} R_{\delta h} \mathbb{C}_{ijkl}} \quad (4.66)$$

Puisque le problème aux limites traité dans le chapitre 5 sont en déformation plane, les vecteurs σ_{ij} et ε_{ij} seront réduits à quatre composantes. L'équation 4.65.a aura la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^z \\ \sigma_{yy}^z \\ \sigma_{zz}^z \\ \sigma_{xz}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^z & C_{12}^z & C_{13}^z & C_{14}^z \\ C_{21}^z & C_{22}^z & C_{23}^z & C_{24}^z \\ C_{31}^z & C_{32}^z & C_{33}^z & C_{34}^z \\ C_{41}^z & C_{42}^z & C_{43}^z & C_{44}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^z \\ \varepsilon_{yy}^z \\ \varepsilon_{zz}^z \\ \varepsilon_{yz}^z \end{bmatrix}$$

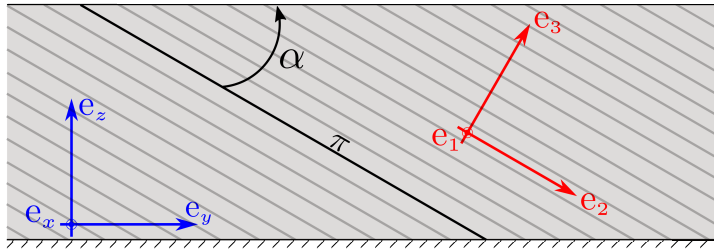


FIGURE 4.11 – Milieu élastique transversalement isotrope, π plan d'anisotropie.

4.6 Implémentation et validation

4.6.1 Implémentation : modifications de la loi Plasol

En gardant la structure de la loi de comportement *Plasol* (figure 4.10) certaines routines ont été changées afin d'introduire l'anisotropie transversale dans ce modèle élasto-plastique.

- **Prédicteur Élastique** (Routine Pla2ea.f)

Le prédicteur élastique σ_{ij}^e est modifié dans cette routine en implémentant l'anisotropie transversale (équation 4.65.b).

- **Correcteur Plastique** (Routine Plaint.f)

Le correcteurs plastique σ_i^p est ainsi calculé :

$$\sigma_i^p = -\Delta\gamma C_{ij}^z \frac{\partial g}{\partial \sigma_j} = -\Delta\gamma \begin{bmatrix} C_{11}^z & C_{12}^z & C_{13}^z & C_{14}^z \\ C_{21}^z & C_{22}^z & C_{23}^z & C_{24}^z \\ C_{31}^z & C_{32}^z & C_{33}^z & C_{34}^z \\ C_{41}^z & C_{42}^z & C_{43}^z & C_{44}^z \end{bmatrix}_{ij} \left[m^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_j + \frac{1}{2II_{\hat{\sigma}}} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx}^z \\ \hat{\sigma}_{yy}^z \\ \hat{\sigma}_{zz}^z \\ \hat{\sigma}_{yz}^z \end{bmatrix}_j \right]$$

- **Fonction H** (Routine Plader.f)

Considérant le vecteur P_i , la première partie de la fonction H est modifiée de la manière suivante :

$$P_i = \begin{bmatrix} C_{11}^z + C_{12}^z + C_{13}^z \\ C_{21}^z + C_{22}^z + C_{23}^z \\ C_{31}^z + C_{32}^z + C_{33}^z \\ C_{41}^z + C_{42}^z + C_{43}^z \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_j} = A + B + C \quad (4.67)$$

$$A = m m^* (P_1 + P_2 + P_3)$$

$$B = \frac{1}{2II_{\hat{\sigma}}} (m + m^*) (\hat{\sigma}_{xx} P_1 + \hat{\sigma}_{yy} P_2 + \hat{\sigma}_{zz} P_3 + \hat{\sigma}_{yz} P_4)$$

$$C = \left[\frac{1}{2II_{\hat{\sigma}}} \right]^2 [\hat{\sigma}_{xx} (C_{11}^z \hat{\sigma}_{xx} + 2C_{21}^z \hat{\sigma}_{yy} + 2C_{31}^z \hat{\sigma}_{zz} + C_{41}^z \hat{\sigma}_{yz})] +$$

$$\left[\frac{1}{2II_{\hat{\sigma}}} \right]^2 [\hat{\sigma}_{yy} (C_{22}^z \hat{\sigma}_{yy} + 2C_{32}^z \hat{\sigma}_{zz} + C_{42}^z \hat{\sigma}_{yz})] +$$

$$\left[\frac{1}{2II_{\hat{\sigma}}} \right]^2 [\hat{\sigma}_{zz} (C_{33}^z \hat{\sigma}_{zz} + 2C_{34}^z \hat{\sigma}_{yz}) + \hat{\sigma}_{yz}^2 C_{44}^z]$$

Pour un comportement en traction avec l'état de contrainte au sommet du cône de Drucker-Prager, la fonction H est calculée selon l'équation 4.68.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} C_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_j} = P_1 + P_2 + P_3 = [C_{11}^z + C_{22}^z + C_{33}^z] + 2[C_{12}^z + C_{13}^z + C_{23}^z] \quad (4.68)$$

4.6.2 Validation numérique

Essai biaxial : solution élastique

Pour valider les changements implémentés, la solution analytique d'un essai biaxial sans confinement et à déplacement contrôlé, a été trouvée pour un matériau élastique linéaire transversalement isotrope caractérisé par un plan d'anisotropie incliné de α (figure 4.12). Pour résoudre ce problème nous avons fait l'hypothèse que le champ de déformations est homogène selon les variables spatiales x et y . Puisque la solution d'un problème élastique linéaire est unique, la solution trouvée sera celle du problème donné.

L'échantillon de figure 4.12 est caractérisé par une hauteur H et une largeur L , le bord $\partial\Omega$ est composé par les quatre côtés du domaine Ω , c'est-à-dire $\partial\Omega_1$ (côté gauche), $\partial\Omega_2$ (côté supérieur), $\partial\Omega_3$ (côté droit) et $\partial\Omega_4$ (côté inférieur). Les conditions aux limites

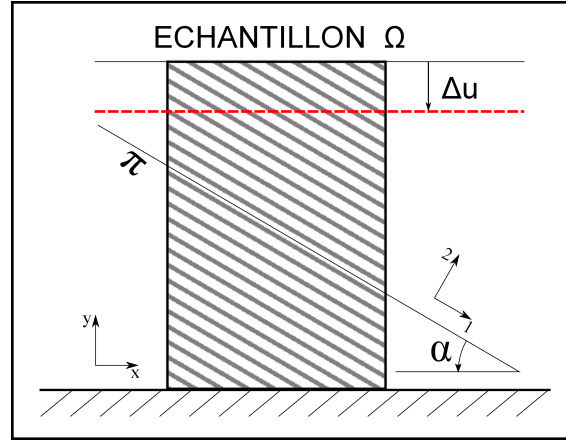


FIGURE 4.12 – Compression biaxiale, π plan d'anisotropie transverse

suivantes sont envisagées pour la résolution du problème :

$$\begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \\ u_z(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{array}{c} \text{Conditions} \\ \text{aux} \\ \text{limites} \end{array}} = \begin{cases} u_y(x, H) = -u_y & \forall x \in \partial\Omega_2 \\ u_y(x, 0) = 0 & \forall x \in \partial\Omega_4 \\ \sigma_x(0, y) = 0 & \forall y \in \partial\Omega_1, \\ \sigma_x(L, y) = 0 & \forall y \in \partial\Omega_3 \\ \sigma_{xy}(0, y) = 0 & \forall y \in \partial\Omega_1 \\ \sigma_{xy}(L, y) = 0 & \forall y \in \partial\Omega_3 \end{cases}$$

À partir des conditions aux limites en déplacement, nous calculons les coefficients γ et δ .

$$u_y(x, 0) = \gamma x = 0 \quad \forall x \in \Omega_4 \quad \implies \quad \boxed{\gamma = 0}$$

$$u_y(x, H) = \gamma x + \delta H = -\Delta H \quad \forall x \in \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = -\frac{u_y}{H}}$$

Afin de trouver les autres constantes, nous développons l'expression de la contrainte selon le repère (O,x,y) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_z \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_z \end{pmatrix}_j \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \delta \\ (\beta + \gamma)/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les constantes qui restent, il est nécessaire de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sigma_x = C_{11}\zeta + C_{12}\delta + C_{13}\frac{\beta}{2} = 0 \\ \sigma_{xy} = C_{31}\zeta + C_{32}\delta + C_{33}\frac{\beta}{2} = 0 \end{cases} \quad (4.69)$$

À partir de l'équation 4.69.a nous pouvons identifier ζ :

$$\zeta = -\frac{C_{12}}{C_{11}}\delta + \frac{C_{13}}{C_{11}}\frac{\beta}{2}$$

Par substitutions de ζ dans l'équation 4.69 nous obtenons :

$$-\frac{C_{31}}{C_{11}} \cdot \left[C_{12}\delta + C_{13}\frac{\beta}{2} \right] + C_{32}\delta + C_{33}\frac{\beta}{2} = 0$$

$$\boxed{\beta = 2\delta \cdot \frac{C_{12}C_{31} - C_{32}C_{11}}{C_{11}C_{33} - C_{31}C_{13}}}$$

Nous aboutissons à l'expression de ζ suivante :

$$\boxed{\zeta = \delta \cdot \left[-\frac{C_{12}}{C_{11}} - \frac{C_{13}}{C_{11}} \cdot \left(\frac{C_{12}C_{31} - C_{32}C_{11}}{C_{11}C_{33} - C_{31}C_{13}} \right) \right]}$$

Par la connaissance de tous les coefficients du champ de déplacement nous avons obtenu la solution analytique en termes de contraintes pour un problème de compression biaxial sans confinement. Le même problème aux limites a été résolu avec la méthode des éléments finis. Par la suite nous avons comparé les deux solutions. Ci-dessous les autres paramètres mécaniques utilisés.

$$\begin{aligned} E_2 &= 300 \text{ MPa} & E_\pi &= fact * E_2 \text{ MPa} \\ \nu_\pi &= 0.25 & \nu_{\pi 2} &= 0.30 \\ G_\pi &= \frac{E_\pi}{2(1 + \nu_\pi)} & G_{2\pi} &= 30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

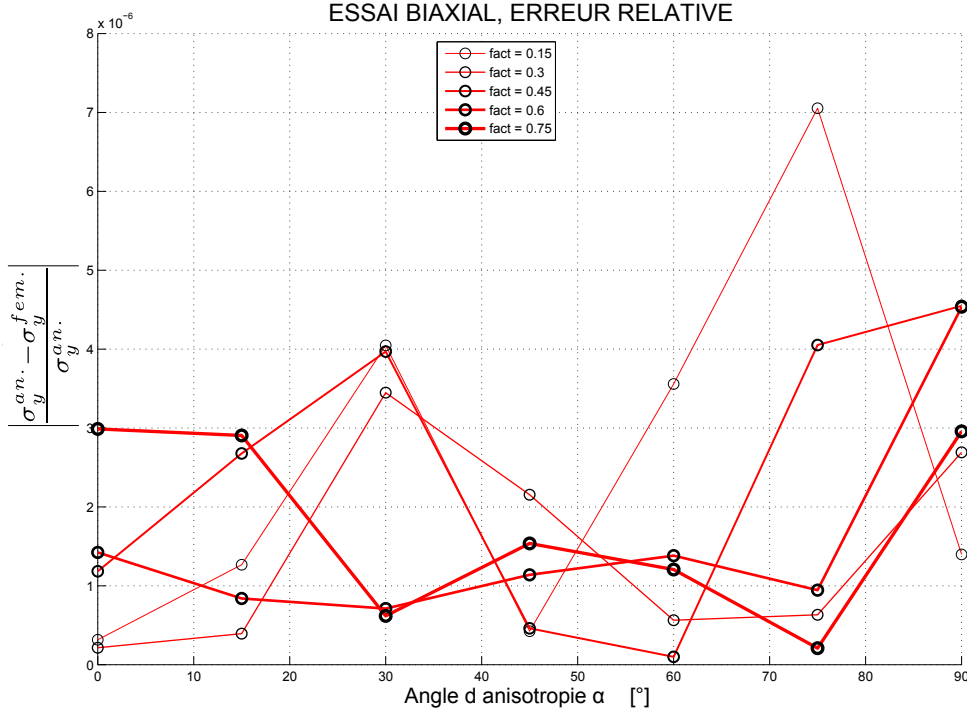


FIGURE 4.13 – Essai biaxial : erreur relative

Le paramètre *fact* représente le rapport entre les deux modules de Young E_2 , E_π . Dans ces calculs nous avons considéré $u_y = 1$ mm et $H=1$ m.

En figure 4.13, nous montrons l'erreur relative parmi les deux solutions en termes de contrainte verticale σ_y dont l'ordre de grandeur de $err_y \approx 10^{-8}$. Cette valeur est suffisamment petite pour considérer que les deux solutions sont égales.

Afin de vérifier aussi que les contraintes tangentielles σ_{xy} sont bien calculés, l'échantillon est soumis à un champ de déformation qui vient du champ de déplacement de l'équation 4.70.

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0025 x - 0.0010 y \\ -0.0010 y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

La comparaison entre les résultats numériques et les résultats analytiques est montrée en figure 4.14 en fonction de I_σ et $II_{\hat{\sigma}}$. Ces résultats nous confirment que l'implémentation donne des résultats corrects pour la partie élastique de la loi de comportement.

Comportement élasto-plastique

Pour valider les changements dans les routines Pla2eaT, PlaintT, PladerT l'algorithme de *return mapping* a été implémenté dans un script Matlab de telle manière

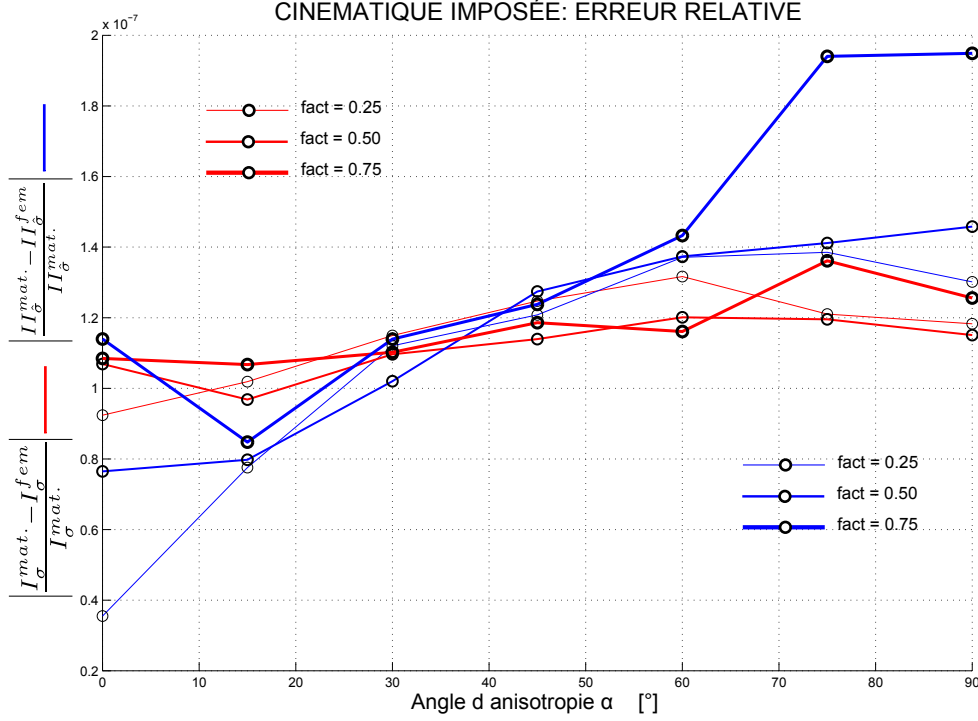


FIGURE 4.14 – Cinématique imposée : erreur relative

que, envisageant un champs de déformation donné, la contrainte dans un état élasto-plastique puisse être calculée et comparée avec celle obtenue avec les éléments finis. La cinématique imposée est la même que celle définie au paragraphe précédent mais amplifiée d'un facteur 100 pour que le milieu puisse atteindre un état plastique :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25x - 0.10y \\ -0.10y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les paramètres élastiques choisis sont les mêmes que ceux du paragraphe 4.6.2. Les paramètres mécaniques envisagés pour la partie plastique sont les suivants :

$$\begin{aligned} c_i &= 300 \text{ kPa} & c_f &= 100 \text{ kPa} \\ \phi_{c_i} &= 5^\circ & \phi_{c_f} &= 18^\circ \\ B_c &= 0.005 & B_f &= 0.001 \end{aligned}$$

Même si l'erreur relative sur le premier invariant de la contrainte err_{I_σ} et le deuxième invariant sur la contrainte déviatorique $err_{II_{\hat{\sigma}}}$ est plus importante par rapport au cas précédent, ils restent suffisamment petits ($err_{I_{\hat{\sigma}}} \approx 10^{-3}$, $err_{II_{\hat{\sigma}}} \approx 10^{-3}$).

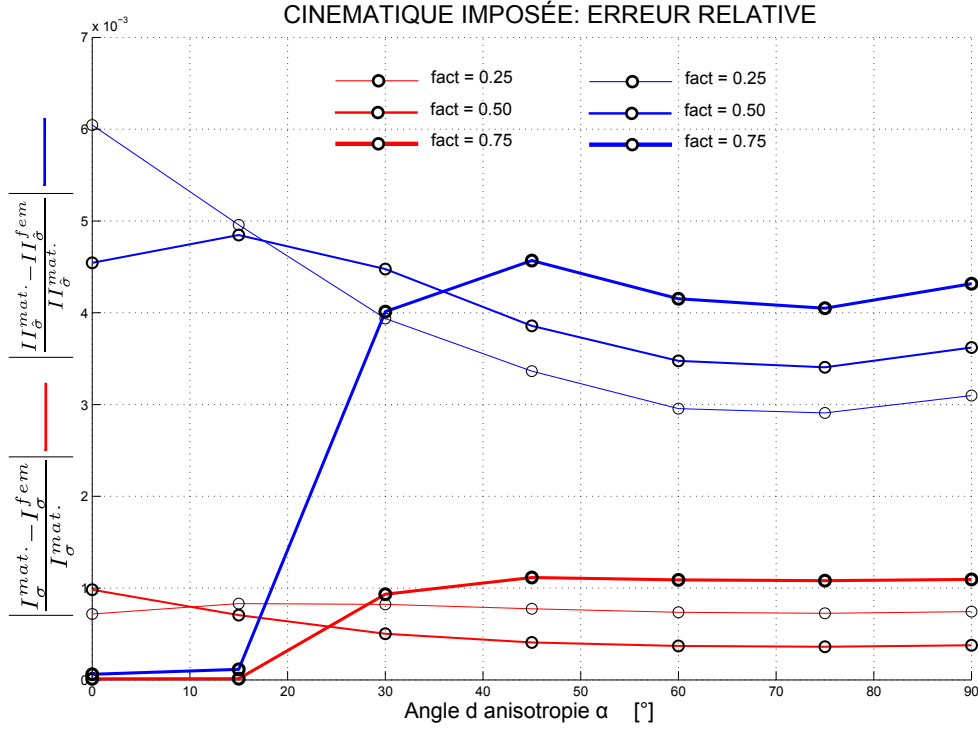


FIGURE 4.15 – Cinématique imposée : erreur relative

Une procédure plus rigoureuse de validation aurait dû être implémentée dans le script Matlab à l'aide d'un schéma d'intégration différent de celui décrit dans la section 4.4.2. Cette stratégie n'a été pas considérée puisque l'algorithme de *return mapping* développé par Barnichon pour la loi Plasol peut bien être envisagé comme validé. De cette façon nous avons montré que, en gardant le même algorithme d'intégration, des calculs faits avec les éléments finis aboutissent au même résultat d'un calcul fait avec le script Matlab au niveau d'un point matérielle. Le script Matlab a été lui même validé en comparant des calculs faits avec la loi Plasol.

Chapitre 5

Simulation d'excavation : étude numérique sur un cylindre creux

5.1 Introduction

Le projet européen Timodaz a eu pour objectif d'étudier le comportement thermo-hydro-mécanique dû au stockage des déchets radioactifs dans des couches géologiques profondes, il est donc prévu de creuser des tunnels afin d'accueillir ces déchets. Le creusement autour de la roche hôte aura comme premier effet d'endommager une zone (EDZ) où les propriétés hydro-mécaniques du matériau seront fortement modifiées. Une des roches argileuses prévues pour le stockage des déchets radioactifs est l'argile de Boom dans le site de Mol. Afin d'étudier à une échelle réduite la zone endommagée autour du forage, des essais sur un cylindre creux ont été réalisées à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (section 3.4.1).

Dans ce chapitre nous présentons la modélisation de ces essais, en envisageant un milieu poreux à saturation complète, composé de deux phases : la phase solide incompressible et la phase fluide caractérisée par une compressibilité k_w . Les détails analytiques concernant la caractérisation du milieu saturé sont présentés dans la section 2.3.2.

Le comportement du squelette solide est modélisé en envisageant deux lois de comportement élasto-plastiques (Plasol et Plasol anisotrope) qui sont décrites en détails dans le chapitre 4. La caractérisation de la partie élastique représente la différence entre ces deux lois constitutives lesquelles sont basées sur un critère de résistance de Drucker-Pruger avec un mécanisme adoucissant sur la cohésion. Dans un premier temps nous avons utilisé l'élasticité linéaire isotrope (lois constitutives Plasol) et, dans un second temps, nous avons changé l'élasticité isotrope en transversalement isotrope (lois constitutives Plasol anisotrope). Nous montrerons que l'utilisation de l'élasticité transversale dans le cadre de l'élasto-plasticité permet de modéliser de façon qualitative le comportement anisotrope de l'argile Boom comme

ont pu le montrer les résultats expérimentaux de Lausanne. Comme le chapitre 3 l'a souligné, l'anisotropie représente une des caractéristiques les plus importantes pour certains géomatériaux.

À cause de la géométrie particulière de l'échantillon, un appareil non-standard a été considéré afin de pouvoir contrôler de façon indépendante la pression de confinement σ^{tot} à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre creux. Un agrandissement de l'appareil expérimentale déjà montré en figure 3.7 est reproposé en figure 5.1 où il est possible d'observer en détail la section verticale de l'échantillon en remarquant les conditions aux limites imposées en terme de pression de confinement σ^{tot} et de pression d'eau p_w . Plusieurs essais ont été réalisés par le laboratoire de Lausanne (EPFL) sur le cylindre

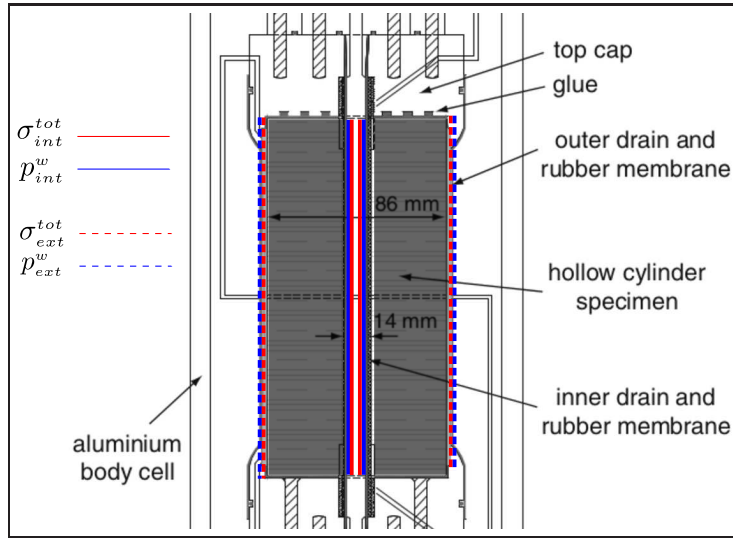


FIGURE 5.1 – Zoom de la section verticale d'un échantillon du cylindre creux dans l'appareil expérimentale.

creux en imposant des déchargements différents (Labieuse et al. [90]). Le parcours de décharge pris en compte dans la modélisation est celui montré en figure 5.2 qui correspond à l'essai 13B-BIS (section 3.4.1). Au début de l'essai le cylindre creux est chargé par une contrainte totale de 4.5 MPa imposée à l'extérieur et à l'intérieur du forage et une pression d'eau de 1.0 MPa est aussi imposée sur les deux bords du cylindre creux. Pour simuler le creusement du tunnel et étudier le développement de l'endommagement, la contrainte totale et la pression d'eau sont respectivement diminuées jusqu'à 1.0 MPa et 0.6 MPa durant 70 minutes (phase A). Dans la phase B, le chargement reste constant afin de permettre la dissipation des incréments de pressions d'eau Δp_w . Cette phase dure 11 heures et 20 minutes.

Afin de modéliser les essais sur le cylindre creux des calculs numériques ont été réalisés sur une section horizontale de l'échantillon montré en figure 5.1 en faisant l'hypothèse de déformations planes. Aucune double contrainte Σ_{ijk} et aucun gradient de déformation microstructurale ∇v_{ij} sont imposées sur la frontière intérieure et extérieure

du cylindre creux. Le paramètres hydromécaniques envisagés dans la modélisation pour la loi de comportement Plasol et Plasol anisotrope sont présentés dans les tableaux 5.1 et 5.2. Ils ont été choisis faisant référence aux travaux expérimentaux de Horseman et al. [83] et Baldi et al. [9], [10] et aux travaux de Chen dans le cadre du projet européen ATLAS ou le rapport d'anisotropie E_π/E_3 est calculé à l'aide d'une opération d'analyse inverse.

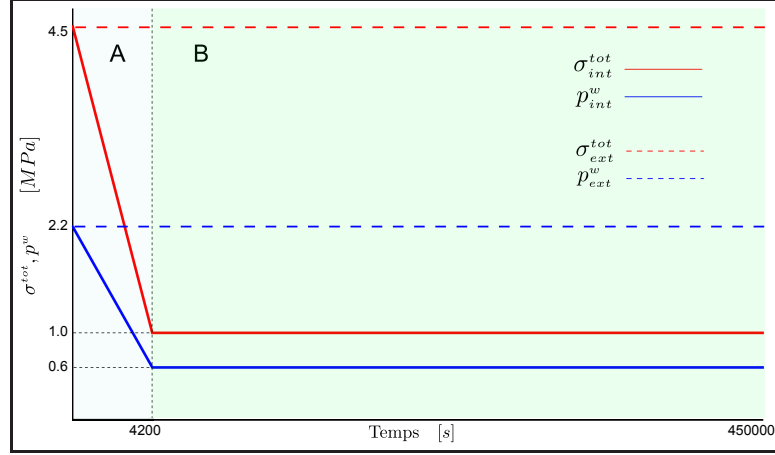


FIGURE 5.2 – Conditions aux limites : déchargement du forage (phase A), stabilisation (phase B). Essai 13_{bis}

Les expériences numériques montrent que pour les deux lois de comportement (Plasol et Plasol anisotrope) les solutions du problème sont caractérisées par des déformations localisées. Dans ce cadre il n'existe pas de théorèmes mathématiques qui peuvent nous assurer d'une solution unique pour ces lois de comportement ; nous avons prouvé qu'il est possible de trouver plusieurs solutions pour le même problème aux conditions aux limites pour un milieu poreux saturé, ce qui semble être nouveau en littérature. De fait nous montrons que la solution peut être caractérisée par des bandes de cisaillement qui se disposent avec des configurations différentes durant le temps et dans l'espace.

Afin de montrer la non-unicité de la solution, plusieurs calculs ont été faits en imposant différents paramètres numériques (notamment la discrétisation temporelle du problème). De cette façon le problème numérique se déroule avec des pas de temps qui ont une taille différente dans le temps, impliquant une initialisation du problème pour des temps différents, ce qui peut conduire l'algorithme de Newton-Raphson à des solutions différentes. Cette méthode a été déjà utilisée par Sieffert et al. [127] pour un problème en mécanique pure.

L'utilisation de la loi de comportement Plasol anisotrope pour la modélisation des essais en laboratoire décrit de façon qualitative le caractère anisotrope de la roche argileuse de Boom. Les déformations plastiques du milieu semblent bien être influencées par le plan d'anisotropie qui caractérise la partie élastique du modèle. Ce résultat correspond de façon qualitative aux expériences de laboratoire de Lausanne (EPFL).

5.2 Données du problème numérique

5.2.1 Maillage

Pour modéliser les essais de Lausanne sur le cylindre creux (section 3.4.1) nous considérons que le domaine mécanique est soumis à un état de déformation plane puisque c'est celui imposé dans l'appareil expérimental de Lausanne. Le chargement et la géométrie du cylindre creux sont les mêmes que ceux envisagés dans les expériences (section 3.4.1) où le rayon intérieur et extérieur du cylindre ont respectivement une dimension de $R_i = 7 \text{ mm}$, $R_e = 43 \text{ mm}$.

La figure 5.3 montre les conditions aux limites et la discrétisation spatiale en quadrilatères choisis pour la modélisation numérique. Pour éviter des mouvements rigides trois degrés de liberté doivent être fixés : le déplacement horizontal u_x sur le nœud A et les deux composantes des déplacements u_i sur le nœud B sont bloqués.

La zone autour du forage est celle qui s'endommage le plus pendant le chargement. Il est donc nécessaire d'établir un maillage plus raffiné. De plus, dans cette zone du domaine et à certains moments du déchargement, les déformations se présentent en bandes de cisaillement.

Afin d'obtenir des solutions numériques qui sont indépendantes du maillage nous utilisons un milieu continu qui permet d'introduire une longueur interne. Pour cela la modélisation du cylindre creux est faite en envisageant la théorie des milieux continus second gradient (section 2.2.3) pour un milieu saturé (Collin et al. [45]) qui représente un cas particulier de la théorie des milieux continus avec microstructure proposée par Germain en 1973 [72] (section 2.2).

L'introduction d'une longueur interne représente une condition nécessaire pour décrire de façon objective la localisation des déformations plastiques. Pour que l'objectivité par rapport au maillage soit atteinte il est aussi nécessaire que la bande de cisaillement soit discrétisée, dans toute son épaisseur, avec un nombre suffisant d'éléments.

Le maillage de la figure 5.3 représente donc un compromis entre une discrétisation spatiale suffisamment fine qui puisse bien décrire l'épaisseur d'une bande de cisaillement et un maillage qui ne soit pas trop dense ce qui peut impliquer des temps de calcul excessifs. Utiliser des éléments trop tordus peut créer des problèmes de convergence sur un calcul. Pour cela le maillage utilisé a été construit en essayant de prendre des éléments les plus carrés possibles. La dimension d'un côté du quadrilatère sur la circonférence peut être ainsi calculée :

$$L = \frac{2\pi R}{4\text{NEL}} = \frac{\pi R}{2\text{NEL}} = K \cdot R \quad \text{avec } K = \frac{\pi}{2\text{NEL}} \quad (5.1)$$

NEL représente le nombre d'éléments sur un quart de circonférence. À partir du rayon intérieur $R_0 = 7 \text{ mm}$ nous estimons tous les rayons correspondants à chaque nœud

pour un angle fixé :

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + K R_0 = R_0 (1 + K)^1 & R_2 &= R_1 + K R_1 = R_0 (1 + K)^2 \\ R_3 &= R_2 + K R_2 = R_0 (1 + K)^3 & \dots & R_n &= R_0 + K R_0 = R_0 (1 + K)^n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Puisque $R_0 = R_e$, et que les rayons R_i sont connus par la géométrie du domaine, nous utilisons l'équation 5.2 pour calculer le nombre de nœuds n sur un rayon du cylindre creux de telle manière que la dimension d'un élément sur le rayon soit approximativement la même que celle sur la circonférence.

$$n = \text{int} \left[\frac{\ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right)}{\ln (1 + K)} \right] \quad (5.3)$$

Maintenant que les nombres de nœuds sur le rayon sont connus, nous intervertissons l'équation 5.2 afin de trouver la valeur de K qui correspond à la valeur de n trouvée (équation 5.4).

$$K = \left[\left(\frac{R_e}{R_i} \right)^{\frac{1}{n}} \right] - 1 \quad (5.4)$$

En connaissant le paramètre K nous pouvons calculer toutes les coordonnées des nœuds par l'équation 5.2, en ayant un maillage composé de 11328 nœuds et 2976 éléments. De cette façon les quadrilatères envisagés peuvent bien être approximés à des carrés.

Il est très important de remarquer qu'aucune hypothèse sur la symétrie (symétrie horizontale et verticale) de la solution ne peut être a priori prise en compte à cause des déformations localisées qui apparaissent dans le cylindre creux pour la plupart des expériences numériques réalisées.

Dans les sections 5.3 et 5.4 nous montrerons la solution numérique de certains calculs où la symétrie verticale et horizontale ne se présente jamais. Pour le régime des déformations localisées il n'est donc pas correct de modéliser les expériences de Lausanne en considérant un quart de cylindre creux au lieu du domaine entier. En effet la symétrie par rapport aux axes horizontaux et verticaux est automatiquement atteinte par les conditions aux limites imposées sur les côtes horizontaux et verticaux (figure 5.4). Pour toutes ces raisons les calculs numériques ont été faits en discrétisant le domaine entier du cylindre creux.

Toutefois dans la section 5.8 nous présentons aussi des calculs faits sur un quart de cylindre creux pour montrer que l'imposition de la symétrie n'amène pas la solution du problème à une solution précise mais les parcours de localisation déjà observés sur le cylindre entier sont encore retrouvés sur le problème du quart du cylindre creux.

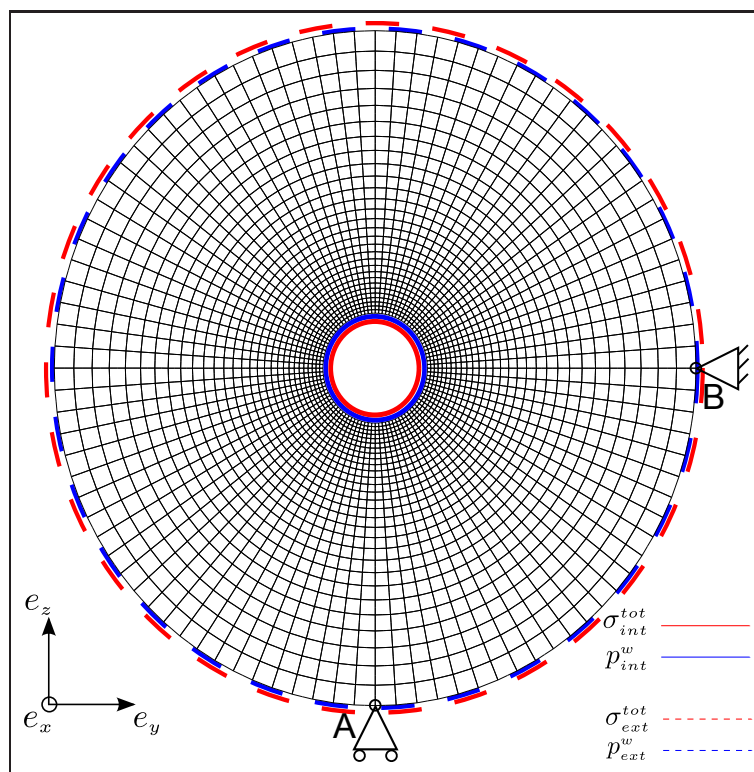


FIGURE 5.3 – Discrétisation spatiale du cylindre creux entier en éléments finis.

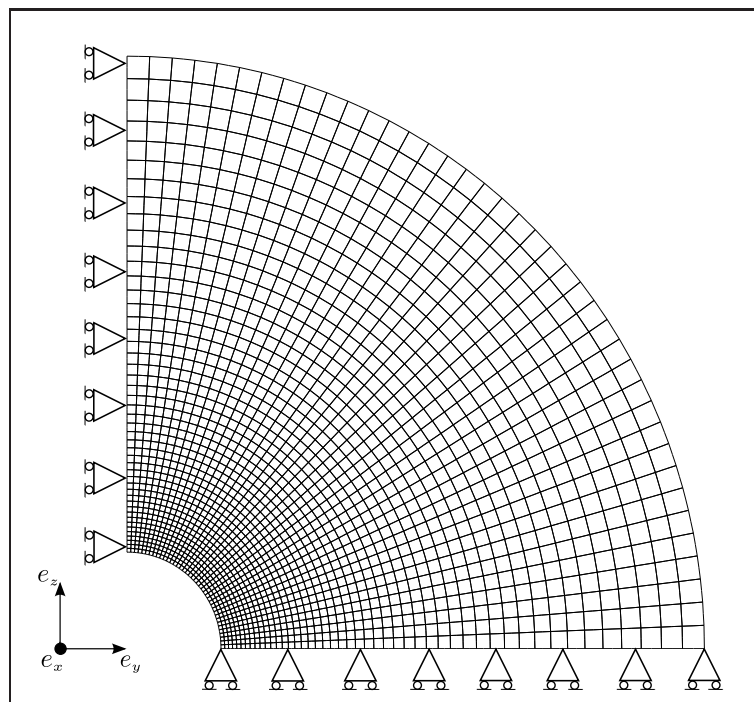


FIGURE 5.4 – Discrétisation spatiale d'un quart de cylindre creux en éléments finis.

5.2.2 Paramètres matériels

Les paramètres qui caractérisent l'écrouissage du matériau avec un critère de plasticité Drucker-Prager sont choisis en accord avec les expériences de laboratoire de Baldi et al [9], [10].

Un angle de $\alpha = 0$ pour l'inclinaison du plan d'isotropie a été choisi. Dans ce cas le repère local (O, e_1, e_2, e_3) est donc coïncident avec le repère global (O, e_x, e_y, e_z) (figure 4.11, section 4.5) et le plan d'isotropie π est identifié par les verseurs (e_x, e_y) . En utilisant les résultats expérimentaux de Chen dans le cadre du projet de recherche ATLAS [40] nous avons choisi un rapport d'anisotropie E_π/E_2 entre les modules de Young pour les deux directions orthogonales égal à deux. Les travaux expérimentaux de Bernier [18] et Bastiaens [14], [15] sont dédiés à la compréhension des phénomènes de diffusion hydraulique. En accord avec les résultats de ces études expérimentales nous avons choisi les paramètres hydrauliques du modèle.

Pour ce qui est de la détermination du paramètre second gradient D , aucune étude n'a été faite en littérature pour caler ce paramètre avec des essais réels. Dans ce cadre le travail de El Moustapha [60] se propose comme objectif de trouver des paramètres pour la loi Plasol et pour le paramètre D qui puissent bien modéliser les travaux expérimentaux de Besuelle [29] en régime de localisation.

Pour les calculs proposés dans ce chapitre le paramètre second gradient D a été choisi par des essais numériques biaxiaux en vérifiant que l'évolution de la bande de cisaillement est constamment traversée par au moins trois éléments. Les paramètres matériels considérés dans la modélisation sont affichés dans les tableaux 5.1 et 5.2.

PARAMÈTRES MÉCANIQUES		isotrope	anisotrope
Module de Young	E_π [Pa]	$300 \cdot 10^6$	$400 \cdot 10^6$
Module de Young	$E_{3\pi}$ [Pa]	$200 \cdot 10^6$	$200 \cdot 10^6$
Coefficient de Poisson	ν_π [-]	0.125	
Coefficient de Poisson	$\nu_{3\pi}$ [-]	0.125	
Module de cisaillement	$G_{3\pi}$ [Pa]	$133 \cdot 10^6$	$177.8 \cdot 10^6$
Cohésion Initiale	c_i [Pa]	$300 \cdot 10^6$	
Cohésion Finale	c_f [Pa]	$100 \cdot 10^6$	
Paramètre d'écrouissage	β_c [-]	0.01	
Paramètre d'écrouissage	β_ϕ [-]	0.01	
Angle de frottement initiale	ϕ_{c_i} [°]	18	
Angle de frottement finale	ϕ_{c_f} [°]	18	
Angle de dilatance	ψ [°]	5	
Solid specific mass [kg/m ³]	ϱ^s	2026	
Paramètre de Second gradient [N]	D	0.03	

TABLE 5.1 – Paramètres mécaniques

PARAMÈTRES HYDRAULIQUE		
Porosité Initiale	ϕ [-]	0.39
Perméabilité intrinsèque	k_{int} [m^2]	4.10^{-19}
Masse d'eau spécifique	ρ_w [kg/m^3]	1000
Viscosité dynamique du fluide	μ [Pa.s]	1.0^{-3}
Liquid compressibility coefficient	$1/\chi_w$ [MPa^{-1}]	1.0^{-4}

TABLE 5.2 – Paramètres hydrauliques

5.2.3 Numérotation des degrés de liberté

Le problème aux conditions aux limites résolu montre des temps de calcul importants, en raison du nombre élevé de nœuds et des degrés de liberté rajoutés à certains nœuds pour définir la partie second gradient du modèle. Pour optimiser le temps de ces calculs quatre numérotations des nœuds ont été prises en compte afin d'utiliser celle qui permet de mieux condenser la matrice de rigidité globale du système. Ceci peut diminuer le temps de résolution du système linéaire et donc le temps global du problème.

Ci-dessous les quatre calculs faits en résolvant le problème aux conditions aux limites avec les quatre numérotations différentes des degrés de liberté. Ces calculs ont été faits uniquement pour la phase A :

1. Une numérotation des degrés de liberté est appliquée le long de la direction x puis le long de la direction y.
Temps du calcul : 17h41.
2. Une numérotation des degrés de liberté est appliquée le long de la direction y puis le long de la direction x.
Temps du calcul : 18h36.
3. Numérotation des nœuds et donc des degrés de liberté par couches successives du périmètre de la cavité (figure 5.5.a).
Temps du calcul : 29h49.
4. Numérotation des nœuds et donc des degrés de liberté en tournant une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre puis dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 5.5.b).
Temps du calcul : 8h11.

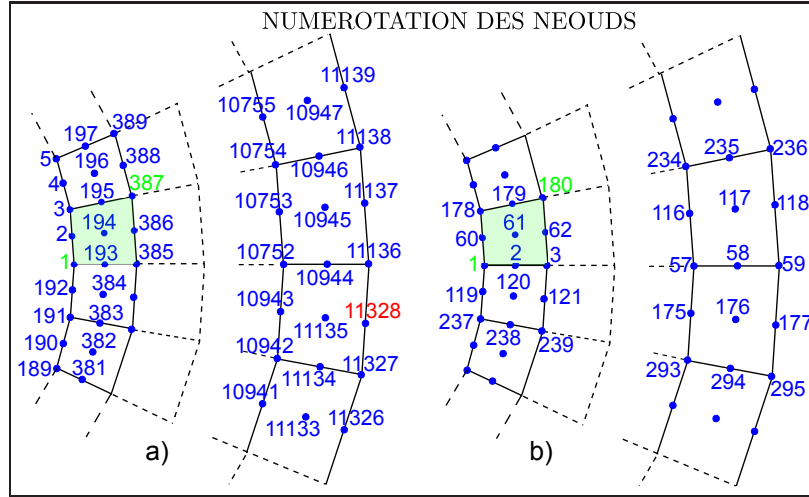


FIGURE 5.5 – Numérotation des nœuds : a) numérotation circulaire, b) numérotation alternée

La numérotation la plus performante est celle du cas 4 où le calcul atteint la solution environ quatre fois plus rapidement que par rapport à la numérotation du cas 3. Qualitativement ce gain de performance est expliqué par le fait que le temps de résolution du système linéaire est proportionnel au carré de la largeur de la bande qui caractérise la matrice de rigidité globale du problème (équation 2.119 de la section 2.4.4). En effet la largeur de bande du système linéaire est très inférieure dans le cas 4 par rapport aux autres.

5.2.4 Algorithme de discrétisation temporelle

Les calculs qui seront montrés dans les sections 5.3 et 5.4 ont deux objectifs principaux :

1. Modéliser les expériences de Lausanne sur un cylindre creux de l'argile de Boom en utilisant les deux lois de comportement présentées dans le chapitre 4, Plasol et Plasol anisotrope. L'utilisation de la loi anisotrope se propose de décrire de façon qualitative les déformations plastiques anisotropes qui semblent être bien mises en évidence dans les résultats expérimentaux de Lausanne.
2. Montrer que pour les deux lois de comportement Plasol et Plasol anisotrope la solution du problème aux conditions aux limites n'est pas unique, étant donné qu'il est possible d'en trouver plusieurs. Pour atteindre cet objectif nous répétons le même calcul avec une discrétisation temporelle différente.

Le logiciel aux éléments finis utilisé (Lagamine, Université de Liège) propose deux stratégies différentes pour gérer la taille du pas de temps afin d'atteindre la solution à la fin du déchargement.

- *Stratégie manuelle.*

La dimension du pas de temps Δt est fixée dans un fichier de chargement, ce qui fait que le calcul avance avec des pas constants dans le temps. Pour cette stratégie, si le calcul ne converge pas car Δt est trop grand, il est nécessaire de relancer le calcul avec une valeur de Δt plus petite.

- *Stratégie automatique.*

Si le calcul converge deux fois consécutives de façon suffisamment régulière, la taille du pas de temps est doublée ; au contraire, si le calcul ne converge pas, le pas de temps Δt est divisé par deux.

Cette stratégie permet à la fois d'optimiser le temps du calcul et, en même temps, évite de relancer le calcul si la taille du pas de temps Δt est trop grande afin qu'il atteigne une convergence satisfaisante. Un Δt_{min} et un Δt_{max} sont alors imposés dans le fichier de chargement pour que la division et la multiplication du pas ne soient pas excessives.

La modélisation du comportement d'un matériau en régime de localisation implique des gradients de déformation très élevés à l'intérieur de la zone localisée. Utiliser une stratégie manuelle pour ce genre de calculs peut nous forcer à choisir un Δt a priori très petit au désavantage du temps du calcul. Une stratégie automatique est alors choisie dans les calculs qui suivent.

Puisque l'unicité de la solution n'est pas garantie pour des lois de comportement adoucissantes, un changement de la discrétisation temporelle peut impliquer un changement de la solution. Nous montrons qu'en changeant les données de la discrétisation temporelle du problème en terme de taille initiale du pas Δt_o , de taille minimale et de taille maximale du pas (Δt_{min} , Δt_{max}) nous changeons l'initialisation du problème pour chaque pas de temps ; il peut donc présenter des solutions différentes.

En modifiant la division en pas de temps on modifie aussi la valeur du champ de vitesse initiale et de son gradient à la première itération de l'algorithme de Newton-Raphson sur un pas de temps. Ce changement peut être suffisant pour conduire le problème numérique à des solutions qui montrent des différences remarquables les unes par rapport aux autres.

L'exemple présenté dans la section 2.5.1 (figure 2.9) explique de façon simple l'importance de l'initialisation d'un algorithme de Newton-Raphson si le problème est caractérisé par plusieurs solutions.

5.3 Étude de non-unicité : loi de comportement Plasol

Pour le problème aux conditions aux limites et initiales présenté dans la section 5.2, une étude de non-unicité avec la loi de comportement Plasol isotrope est développée dans cette section. Afin de montrer les différentes solutions que le problème numérique peut présenter, les données concernant la discrétisation temporelle sur la gestion de la taille du pas sont changées. Nous considérons deux solutions comme différentes entre elles selon les deux critères suivants :

- La configuration des points en charge plastique ou en charge-décharge élastique dans l'espace.
- L'évolution des points en charge plastique ou en charge-décharge élastique dans le temps.

Les solutions qui sont montrées dans la suite présentent des déformations localisées en bandes de cisaillement. Les critères précédemment décrits afin de distinguer une solution d'une autre ont donc pour objective d'analyser l'évolution des déformations localisées dans le temps et l'espace (nombre de bandes de cisaillement actives, temps durant lequel une bande se forme, temps durant lequel une bande se désactive, type de bande, etc etc).

De façon qualitative nous pouvons classer les solutions de ce problème aux conditions aux limites en trois groupes :

1. **Groupe 1.**
Solution axisymétrique.
2. **Groupe 2.**
Solution en bandes de cisaillement formée à partir d'une couronne circulaire très fine autour du forage pour se développer vers l'extérieur (ISO-1, ISO-4 figure 5.6) au fur et à mesure de la décharge du forage.
3. **Groupe 3.**
Solution en bandes de cisaillement se présentent à partir de la décharge d'une grosse couronne circulaire de points plastifiés (ISO-2, ISO-3 figure 5.6).

Il est important de remarquer que la solution axisymétrique avait pu être trouvée en imposant une valeur du paramètre second gradient D beaucoup plus grand que la taille de l'échantillon. De cette manière, pour modéliser un essai biaxial, puisque l'épaisseur de la bande de cisaillement est beaucoup plus grande que l'échantillon, la solution sera toujours celle homogène où tous les points sont en charge plastique. Cet exemple reste vrai pour l'essai sur un cylindre creux sauf que la solution ne sera pas homogène mais axiale symétrique.

À partir de la classification précédente nous montrerons que, pour le même type de solution en bandes de cisaillement l'évolution du problème est différente. La phase de décharge (phase A) et de stabilisation (phase B) est prise en compte dans la modélisation numérique.

Pour identifier une bande de cisaillement nous regardons l'état en contrainte de chaque point matériel. En utilisant les principes de l'élasto-plasticité (section 4.2.2) nous allons colorer chaque point du domaine étudié selon l'état des contraintes correspondante, jaune si l'état de contrainte est à l'intérieur du critère de plasticité, bleu si l'état de contrainte est sur le critère de plasticité.

Plusieurs calculs ont été faits pour étudier le problème de non-unicité pour le problème du cylindre creux. Parmi toutes les solutions qui montrent des déformations localisées nous en avons choisi quatre qui semblent être les plus significatives pour le problème étudié. La solution axiale-symétrique est aussi présentée dans les sections suivantes. En figure 5.6 nous proposons l'ensemble des solutions trouvées durant le temps pour la phase A des conditions aux limites. Dans l'annexe B.1.1 nous proposons l'évolution de l'état des points de Gauss (figures B.1, B.2, B.3 et B.4) et des déformations plastiques équivalentes ε_{eq}^p (figures B.5, B.6, B.7 et B.8) de façon plus détaillée.

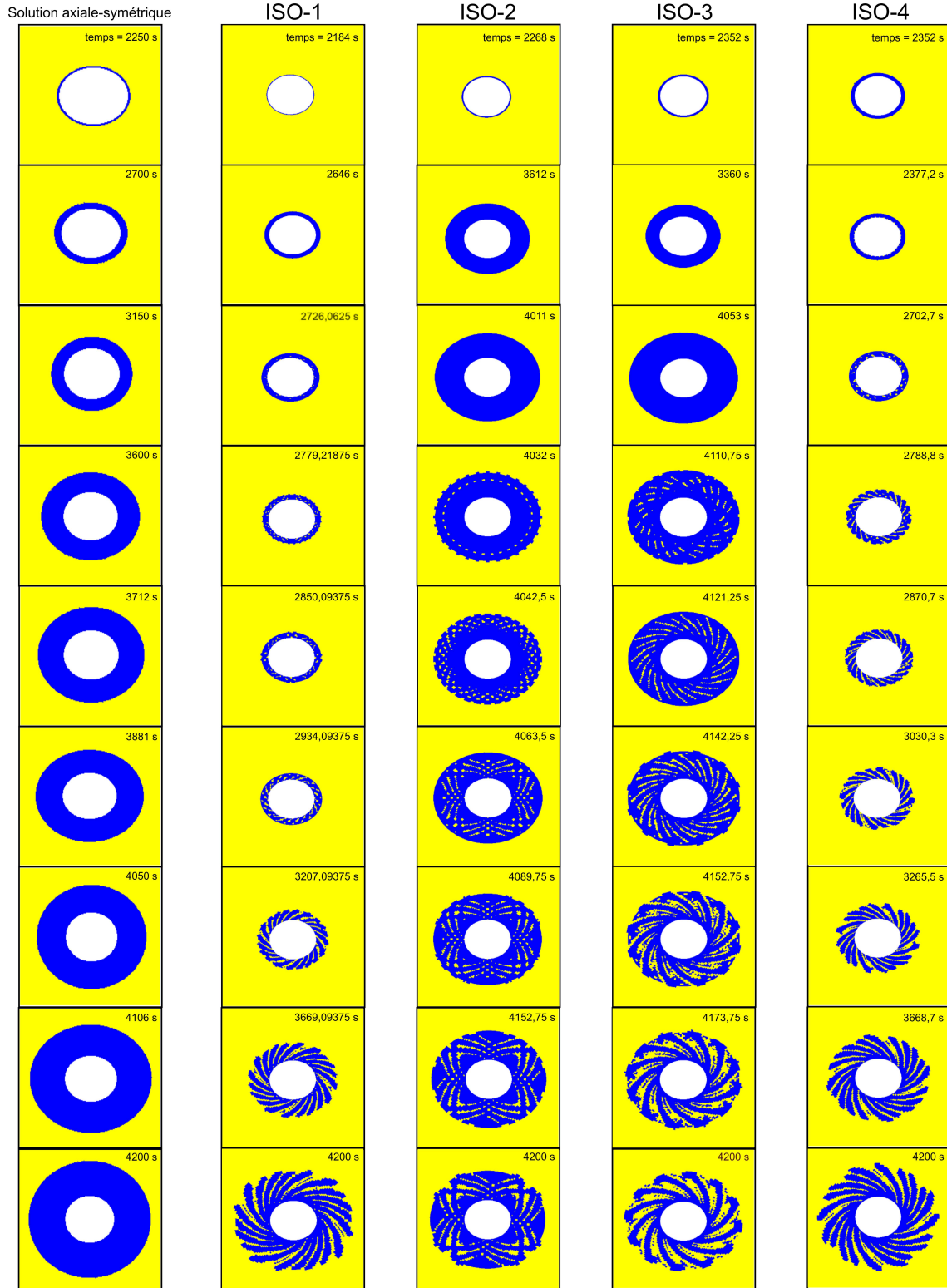


FIGURE 5.6 – Évolution des quatre solutions trouvées pour la phase A : points de Gauss en charge plastique (en bleu), en charge-décharge élastique (en jaune).

5.3.1 Déchargement du forage : phase A

La loi de comportement Plasol est initialement proposée pour modéliser le problème couplé d'un cylindre creux soumis aux conditions aux limites des essais de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne en condition saturée.

Les solutions obtenues à la fin de la phase A sont montrées dans les figures 5.7 et 5.8 et présentent des zones à déformations localisées en bandes conjuguées et en bandes à spirales. Toutes les solutions présentées à la fin de la phase A montrent une distribution de l'état de points de Gauss invariante par rotation. Le calcul ISO-2A est le seul que, jusqu'au pas 32 ($t=4089,75s$), présente une solution symétrique par rapport les axes horizontales et verticales.

Le tableau 5.3 montre pour chaque calcul la taille minimale du pas Δt_{min} , la taille maximale du pas Δt_{max} et la taille initiale du pas Δt_o utilisées. Au début du déchargement, la solution du problème étant purement élastique, le calcul arrive à bien converger de façon à ce que la taille du pas puisse être facilement doublée. La valeur maximale de la taille du pas atteinte par le calcul est indiquée avec Δt_{max}^* dans le tableau 5.3. Après qu'une couronne circulaire autour du forage a déjà plastifiée, le problème commence à présenter les premiers points en décharge élastique abandonnant la solution axiale symétrique. À partir de ce moment le calcul n'arrive plus à converger avec la taille maximale du pas Δt_{max} , ce qui force à réduire le pas plusieurs fois au fur et à mesure de la décharge. Les tailles minimale et maximale du pas atteintes par le calcul sont indiquées dans le tableau 5.3 comme Δt_{min}^* et Δt_{max}^* .

Calcul	Group	Δt_o	Δt_{min}	Δt_{max}	Δt_{min}^*	Δt_{max}^*	n° bnds	bnds
ISO-1A	2	42 s	0.001 s	84 s	0.65625 s	84 s	20	Pér.
ISO-2A	3	42 s	0.001 s	840 s	1.3125 s	672 s	24	Conj.
ISO-3A	3	168 s	0.001 s	1680 s	5.25 s	672 s	12	Pér.
ISO-4A	2	8.4 s	0.001 s	8.4 s	2.1 s	8.4 s	20	Pér.

TABLE 5.3 – Données pour la gestion de la discrétisation temporelle du calcul

En observant la classification des charges des points de Gauss, nous pouvons affirmer que les solutions ISO-1A et ISO-4A appartiennent au groupe 2 alors que les solutions ISO-2A et ISO-3A appartiennent au groupe 3 (5.3). Pour mieux comprendre la nature de cette classification et les différents déclenchements de bandes de localisation nous regardons de près l'évolution des calculs ISO-1A et ISO-3A dans le temps (figures 5.9.a et 5.9.b).

Après avoir plastifié en forme de couronne circulaire très fine, le calcul ISO-1A commence à présenter des points en décharge élastique à partir de la zone adjacente de l'intérieur du forage ($t=2184$ s). Au fur et à mesure de la décharge, la densité de points en décharge élastique tend à augmenter ($t=2860$ s) jusqu'à que les points en décharge élastique se regroupent pour bien définir les bandes de cisaillement ($t=3207$ s). À partir du moment où les zones à déformation localisée sont bien définies, ils commencent à

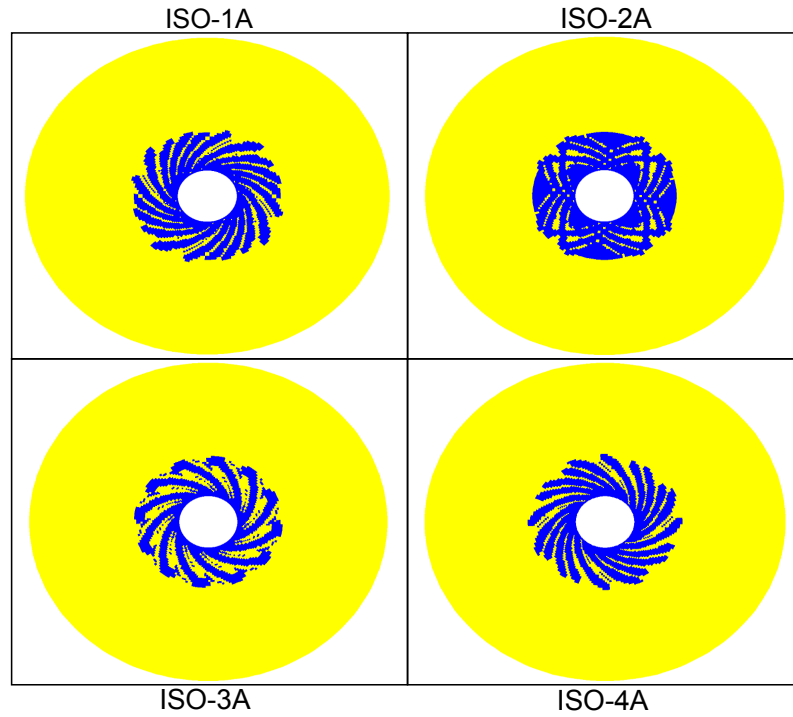


FIGURE 5.7 – Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : points en charge plastique en bleu, points en charge-décharge élastique.

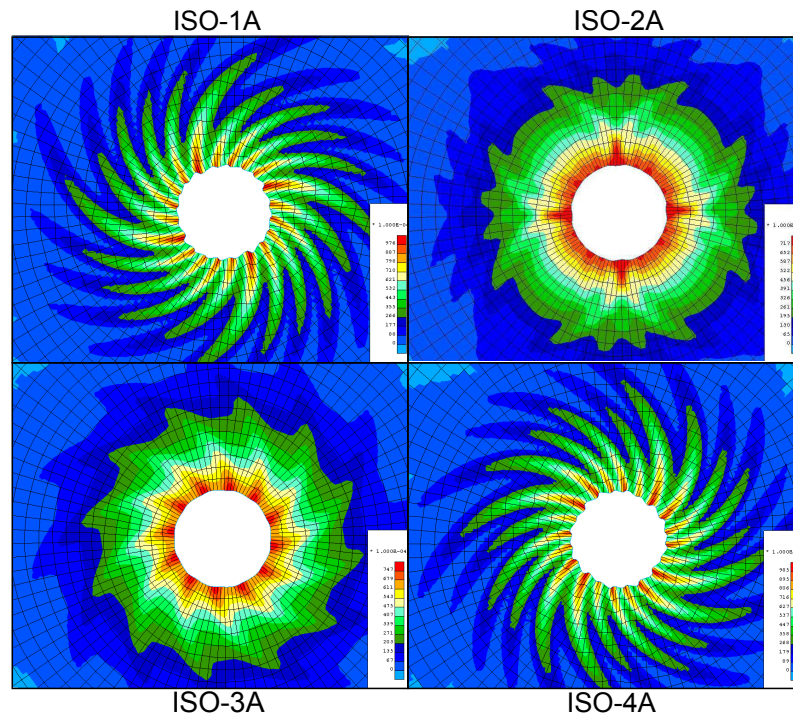


FIGURE 5.8 – Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : déformations plastiques équivalentes ε_{eq}^p (déplacements amplifiés d'un facteur 10).

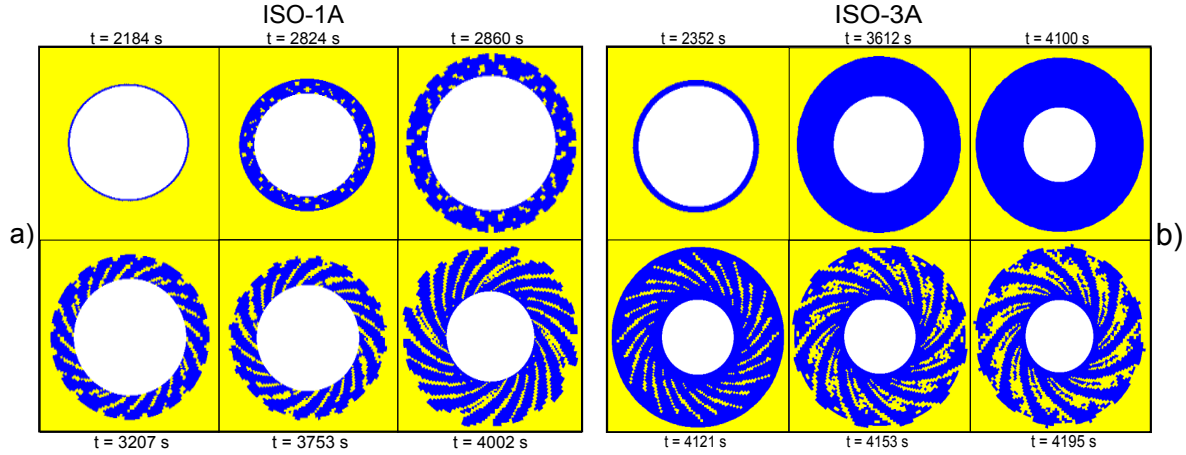


FIGURE 5.9 – Évolution du calcul ISO-1A et ISO-3A pour la phase A : points en charge plastique

s'élargir vers l'extérieur du cylindre creux ($t=3753$ s et $t=4002$ s) jusqu'à qu'ils arrivent à la configuration de figure 5.7 ($t=4200$ s).

À la différence du calcul ISO-1A, le calcul ISO-3A conserve une solution axiale symétrique presque jusqu'à la fin de la décharge ($t=4100$ s) lorsqu'une brusque décharge élastique se déclenche à l'intérieur de toute l'épaisseur de la couronne plastifiée. Dans les pas qui suivent les bandes de cisaillement continuent à se former en définissant mieux ses contours ($t=4153$ s et $t=4195$ s) jusqu'à arriver à la configuration propre de la fin de la décharge ($t=4200$ s).

Il est nécessaire de remarquer que les solutions en bandes de localisation qui se déclenchent avec le même mécanisme (groupe 2 ou groupe 3) peuvent se développer de façon différente dans le temps comme il est montré pour les calculs ISO-2A et ISO-4A. Pour le premier, la seule différence est que les bandes sont tournées dans le sens opposé par rapport au cas ISO-1A alors que le calcul ISO-2A montre une configuration à bandes conjuguées.

5.3.2 Stabilisation : phase B

Dans la phase B du déchargement les conditions aux limites sont laissées constantes afin de laisser se dissiper les incréments de pression d'eau. L'objectif de cette partie n'est pas de chercher plusieurs solutions mais de regarder l'évolution des zones localisées dans le temps.

À partir de la figure 5.10 nous pouvons observer qu'à la fin du déchargement ($t=45000$ s), les bandes de localisation se propagent jusqu'à deux tiers du cylindre creux en conservant toujours la structure de bandes à spirales. La solution ISO-2B montre aussi des bandes à spirales de forme similaire aux résultats des autres simulations, même si à la fin de la phase A cette solution est caractérisée par des bandes conjuguées.

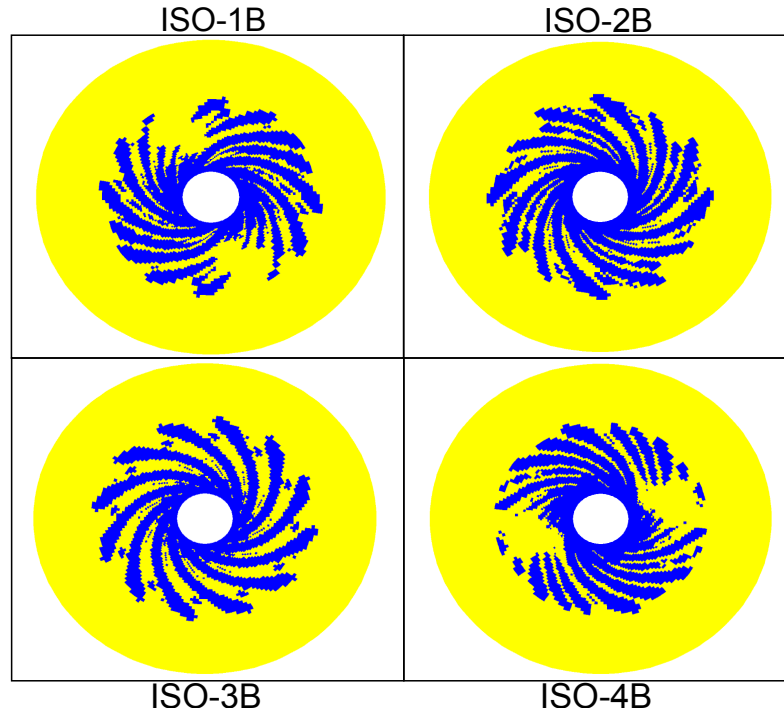


FIGURE 5.10 – Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : points en charge plastique en bleu, points en charge-décharge élastique.

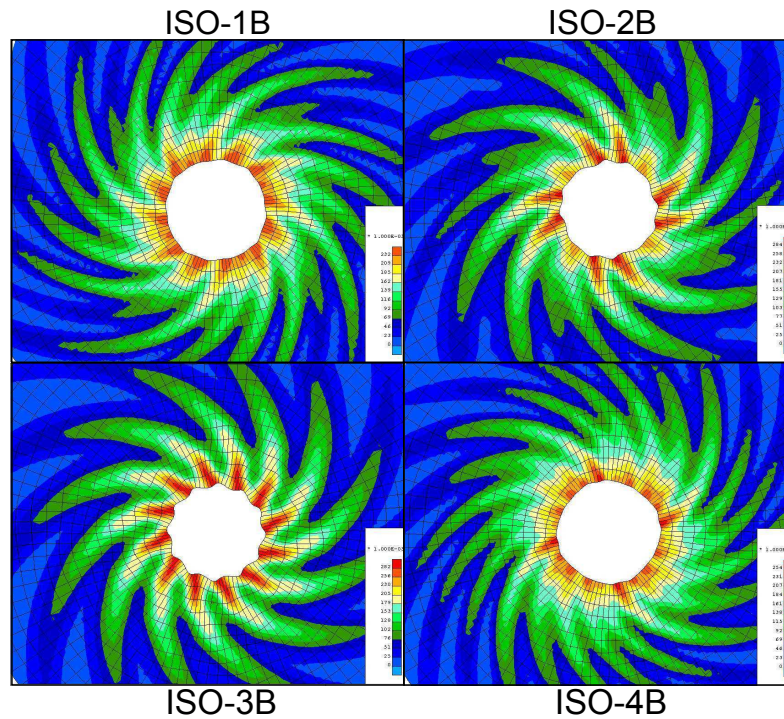


FIGURE 5.11 – Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : déformations plastiques équivalentes ε_{eq}^p (déplacements amplifiés d'un facteur 2).

Il est donc clair, que pour le même calcul certaines bandes peuvent se désactiver en changeant la forme de la solution. La figure 5.12 présente les détails de ce changement en trois temps différents. À $t=4368$ s les bandes conjuguées commencent à se décharger pour ne laisser que les bandes à spirales qui continuent à se charger ($t=4536$ s). À $t=4788$ s les bandes conjuguées sont complètement désactivées. Cet aspect a été déjà remarqué par Bésuelle et al. [27] sur des essais biaxiaux en mécanique pure. Bésuelle a aussi montré que, même expérimentalement, ce phénomène d'activation et de désactivation de bandes peut être observé en laboratoire [29].

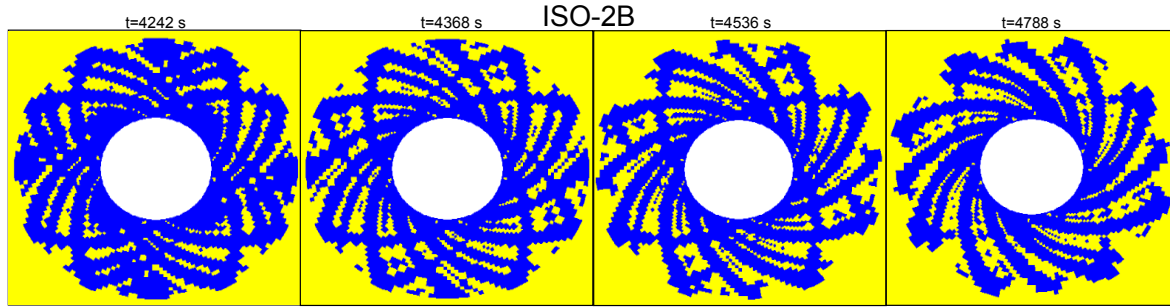


FIGURE 5.12 – Changement de parcours de localisation, calcul ISO-2B (phase B)

En superposant les résultats des calculs ISO-3 et ISO-4 à la fin de chaque phase nous pouvons observer que le nombre des bandes de cisaillement n'est pas changé mais une légère rotation des spirales se présente à la fin de la phase de stabilisation (figure 5.13). Dans cette figure nous affichons en bleu, les points en charge plastique à la fin de la phase A, en rouge, les points en charge plastique à la fin de la phase B, et en noir, les points que les deux solutions ont en commun.

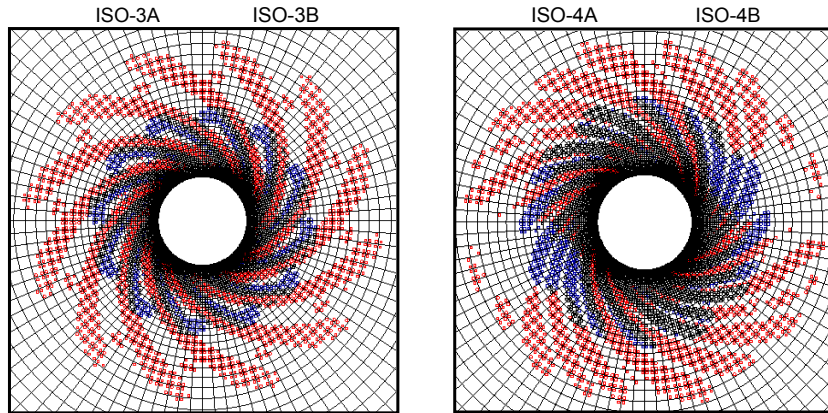
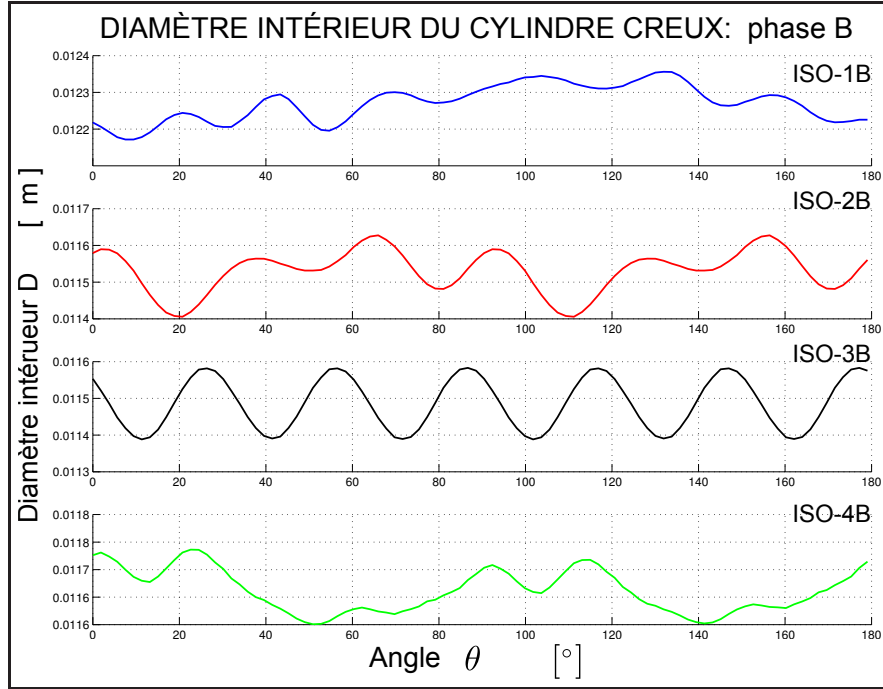


FIGURE 5.13 – Comparaison des solutions entre la phase (A) et la phase (B)

La figure 5.14 montre le diamètre à l'intérieur du cylindre creux à la fin de la phase B. Nous remarquons que les calculs ISO-2B et ISO-3B, appartenant au même groupe de solutions (groupe 3), montrent un comportement périodique du forage intérieur avec une période de 90 degrés pour ISO-2B et de 30 degrés pour ISO-3B.

FIGURE 5.14 – Diamètre intérieur du cylindre creux $D_{int} = f(\theta)$ (phase B)

5.3.3 Convergence numérique du problème

Les valeurs des paramètres de convergence (en force et en déplacement) représentent un indicateur de l'évolution du calcul au fur et à mesure du processus itératif sur un pas de temps. Il est donc représentatif du comportement global qui concerne la solution numérique d'un problème aux conditions aux limites.

De ce fait une étude de convergence est proposée dans cette section pour les quatre solutions trouvées avec la loi de comportement Plasol. Les valeurs des tolérances sur la convergence en force et en déplacement sont respectivement $tol^{force} = 1 * 10^{-7}$ et $tol^{depl} = 1 * 10^{-5}$. Le nombre maximal d'itérations imposé est de trente. Cette étude analyse la convergence dans les aspects suivants :

- **Nombre d'itérations en fonction du nombre de pas.**

La figure 5.15 montre qu'en passant d'un état élastique à un état élasto-plastique le nombre d'itérations passe de quatre, cinq itérations à un nombre variable sensiblement supérieur. Le passage de la solution axisymétrique à celle avec des déformations localisées bien définies montre des pics pour la convergence dans toutes les solutions.

La raison principale qui justifie cette augmentation du nombre d'itérations est que, en raison de la non-unicité, dès que le domaine commence à plastifier, l'algorithme numérique essaie de trouver parmi toutes les solutions possibles celle qui

garantie l'équilibre durant ce pas. Dans le calcul ISO-4A la tendance moyenne de la convergence est bien claire étant donné qu'il est fait avec un Δt_{max} petit. Dans la section 5.3.3 une analyse plus détaillée est proposée pour certains pas du calcul ISO-2A.

- **Temps en fonction du nombre de pas.**

La figure 5.16 montre l'avancement du calcul en fonction du temps, en permettant de voir la discrétisation temporelle de chacun. Dans la phase A les quatre calculs montrent un plateau en indiquant la fin de l'état élastique et le début de la phase élasto-plastique. Ce plateau est justifié par le fait que, pendant le comportement élastique, le calcul avance en doublant la taille du pas jusqu'à arriver à sa taille maximale. Quand le milieu plastifie, il n'arrive plus à converger avec un pas aussi grand et commence donc à le diviser jusqu'à ce qu'il trouve la taille du pas Δt suffisamment petite. Dès que les zones localisées sont bien définies le calcul progresse en doublant la taille du pas comme on peut voir à la fin de la phase A et au début de la phase B.

Nous remarquons que les solutions qui appartiennent au même groupe (ISO-1A, ISO-4A au groupe 2 et ISO-2A, ISO-3A au groupe 3) sont celles caractérisées par un intervalle de temps Δt_{max} du même ordre de grandeur. Δt_{max} semble être la donnée qui influence le plus le choix de la solution entre celle du groupe 2 et celle du groupe 3. Cet aspect sera présenté en détail dans le paragraphe 5.6.

- **Valeurs de la convergence pour chaque pas en force et en déplacement**

Les valeurs des paramètres de convergence f_{conve} , d_{conve} présentés dans les équations 2.122 et 2.123 de la section 2.4.4 sont affichées pour chaque pas de temps et chaque itération (figures 5.17 et 5.18).

Dans cette figure nous retrouvons les pics en terme d'itération pour chaque pas de temps présentés dans la figure 5.15. Dès que le milieu dépasse l'état élastique, il semble clair que la vitesse de convergence quadratique est perdue pour ces calculs.

La valeur de la tolérance en force étant très basse, la valeur de d_{conve} atteint le bruit numérique et reste presque constante pendant les dernières itérations sur le pas de temps. Cet aspect est observable en figure 5.18 où la couleur correspondante à la valeur de d_{conve} est la même pendant les dernières itérations. Le bruit numérique pour la convergence en déplacement se remarque aussi dans les figures 5.22 et 5.23 de la section suivante où nous analysons de près la convergence de certains pas.

Dans l'annexe B.1.3 les valeurs de la convergence pour chaque pas de temps en force et en déplacement sont proposées pour tous les autres calculs (ISO-1, ISO-3 et ISO-4). La remarque faite auparavant sur le bruit numérique du calcul ISO-2 est valable aussi pour les autres solutions trouvées (ISO-1, ISO-3 et ISO-4).

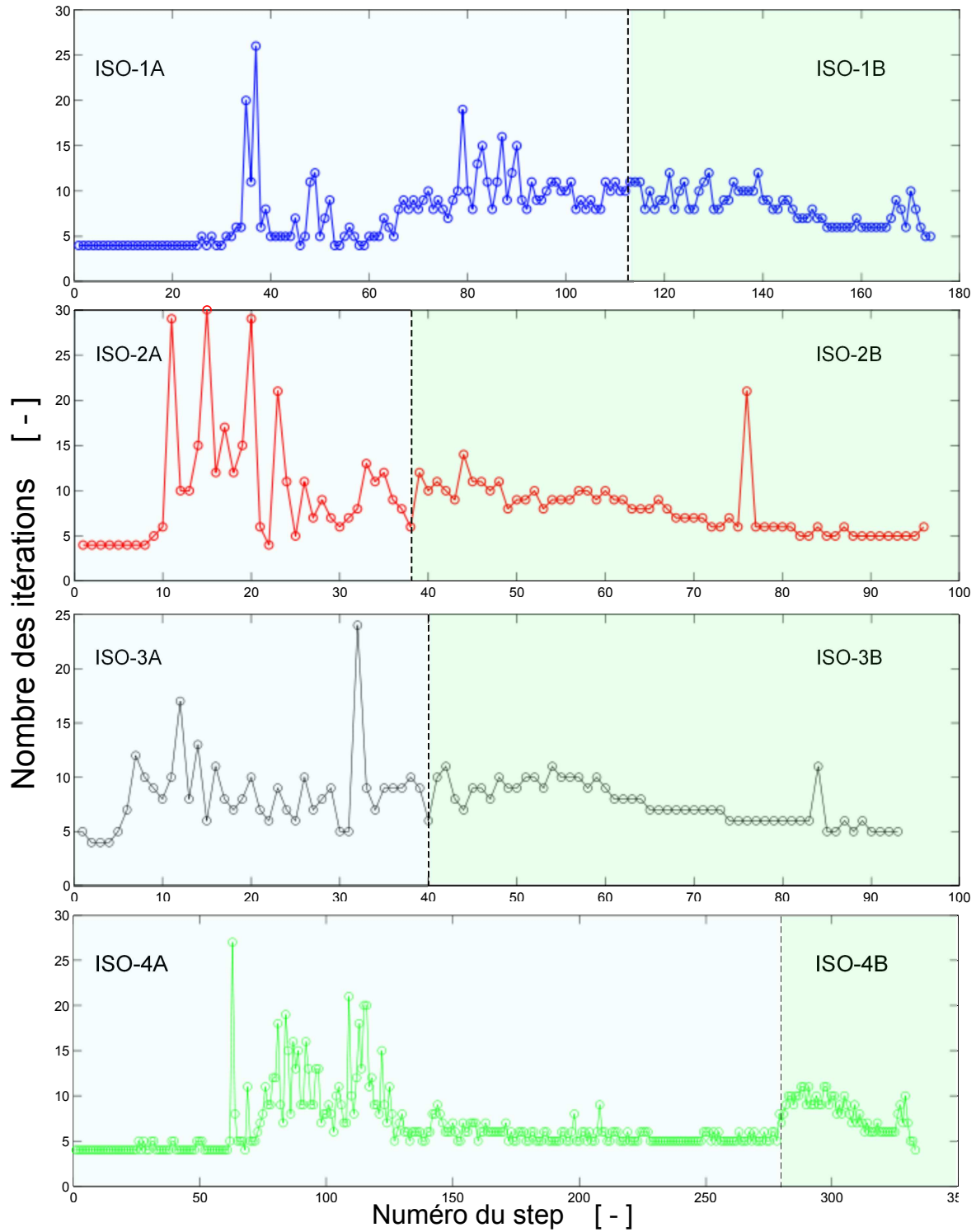


FIGURE 5.15 – Convergence du problème : nombre d'itérations pour chaque pas

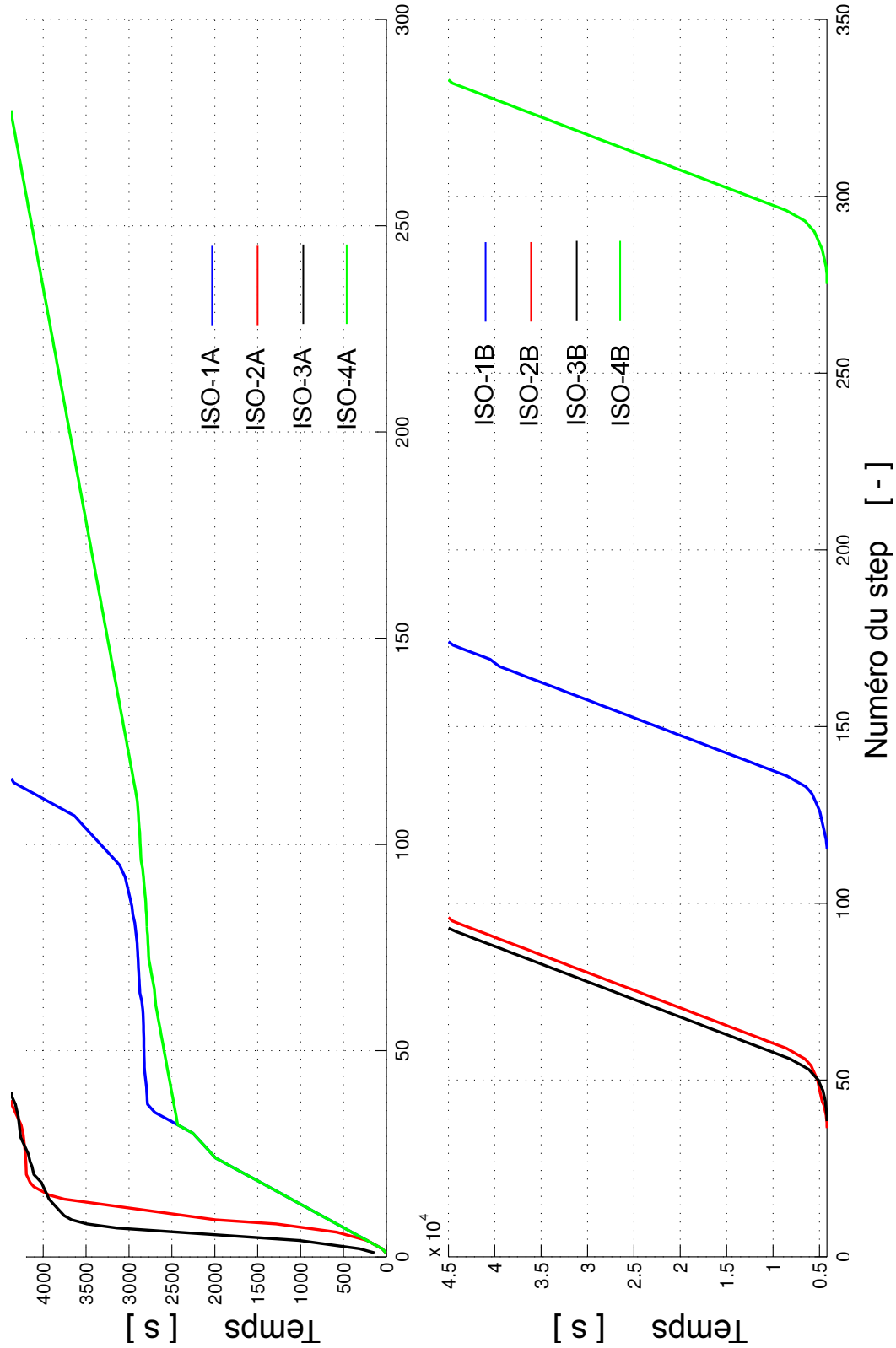


FIGURE 5.16 – Convergence du problème : nombre de pas par rapport au temps du calcul

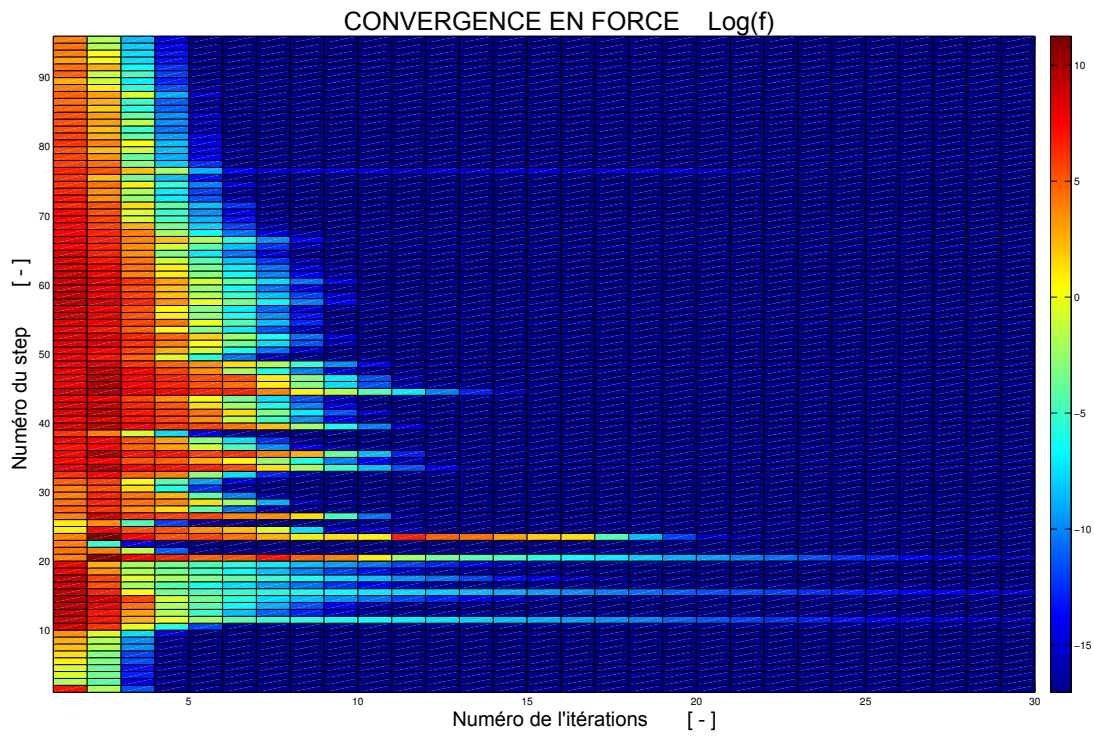


FIGURE 5.17 – Convergence en force : calcul ISO-2A,B

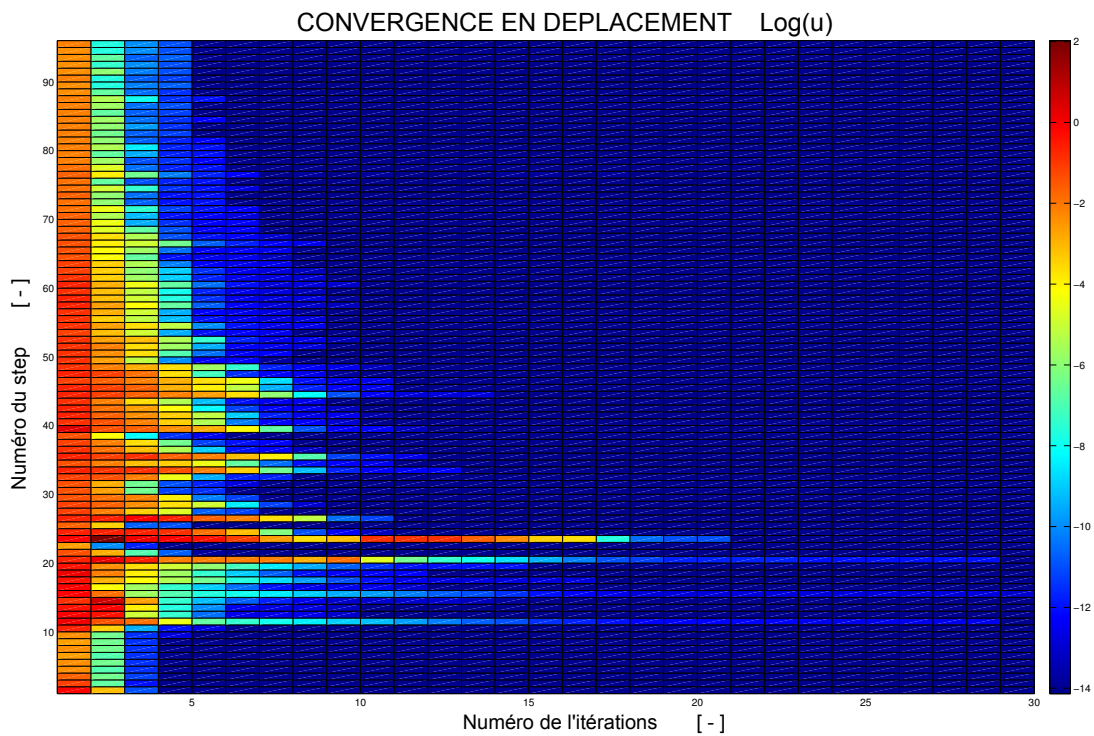


FIGURE 5.18 – Convergence en déplacement : calcul ISO-2A,B

Convergence des pas 15, 20 et 21 : Calcul ISO-2A

Afin de mieux comprendre les raisons pour lesquelles, en présence d'un état plastique, la convergence montre des pics, nous analysons trois pas du calcul ISO-2A : le 15, le 20 et le 21. Une analyse de l'état du milieu pendant les itérations est aussi envisagée pour ces pas.

Pas 15.

La solution pendant les itérations du pas 15 est montrée en figure 5.19. Ce pas de temps n'arrive pas à la convergence en utilisant l'incrément de temps du pas précédent $\Delta t = 336s$ (figure 5.19.a) donc il est forcé de le diviser par deux et de redémarrer le calcul du pas 15 avec un $\Delta t = 168s$ (figure 5.19.b). Dans cette première tentative l'incrément de temps est tel que la contrainte correspondante à la déformée de chaque itération donne des structures qui ne permettent pas de respecter l'équilibre. De cette façon, après l'itération 23 (figure 5.19.a), la déformée est caractérisée par un jacobien négatif causant l'arrêt du logiciel qui redémarre le processus itératif avec un incrément de temps divisé par deux. En figure 5.19 et 5.20 nous avons indiqué avec DIVIS le nombre de fois que le logiciel divise par deux le pas de temps.

Après avoir divisé la taille du pas, l'algorithme de Newton-Raphson est redémarré en atteignant une solution parfaitement axisymétrique avec 30 itérations. Le fait que le calcul a besoin de toutes ces itérations pour arriver à une solution axiale symétrique est du couplage qui existe entre la partie premier gradient et la partie second gradient pendant la résolution numérique du problème, comme confirmé par les figures 5.22 et 5.24.

Ces figures présentent la convergence globale du problème ainsi que celle pour chaque degré de liberté en déplacement (d.d.l. partie premier gradient, d.d.l. pression d'eau, d.d.l. partie second gradient) concernant les pas 15 et 20. Il semble clair que le degré de liberté sur la partie second gradient a besoin de 30 itérations pour atteindre une valeur inférieure à tol^{force} alors que la convergence en déplacement après l'itération 17 est déjà au-dessous de tol^{depl} . Entre les itérations 17 et 30, la convergence reste constante puisqu'elle atteint le bruit numérique.

Pas 20.

Le pas 20 est le premier qui commence à présenter des points en décharge élastique à l'intérieur de la couronne circulaire. De façon qualitative les mêmes considérations faites sur la convergence peuvent être proposées pour ce pas (figures 5.22 et 5.24). Néanmoins, dans ce pas, le calcul atteint la solution sans faire aucune division du pas. Il converge en 29 itérations.

Pas 21.

Le pas 21 converge en divisant le pas quatre fois. L'incrément initial du pas de temps Δt est égal à $\Delta t = 21s$ et celui avec lequel il converge est égal à $\Delta t = 1.3125s$. Pendant les itérations de chaque division de Δt montrés en figure 5.20 le calcul trouve plusieurs

structures qui ne satisfont pas l'équilibre mais qui sont toutefois possibles. En effet dans d'autres calculs il a été possible d'obtenir la convergence avec ces mêmes structures à déformation localisée mais correspondantes à temps différents (figure 5.21).

Cette figure montre des solutions ultérieures trouvées avec des données différentes de la discrétisation temporelle ($\Delta t_{max} = \Delta t_o$), où nous retrouvons de façon qualitative certaines structures de la figure 5.20. Les images a) et b) représentent des solutions à bandes conjuguées semblables à ce qui est obtenu pendant le pas 21 à l'itération 7 de la division 0, l'image c) semble être comparable à la figure qui correspond à l'itération 30 après la première division du pas. Enfin la solution montrée dans l'image d) de la figure 5.21 est pratiquement la même que celle obtenue pendant la troisième division du pas 21, à l'itération 30. Les figures 5.23 et 5.25 montrent les détails de la convergence pour le pas 21.

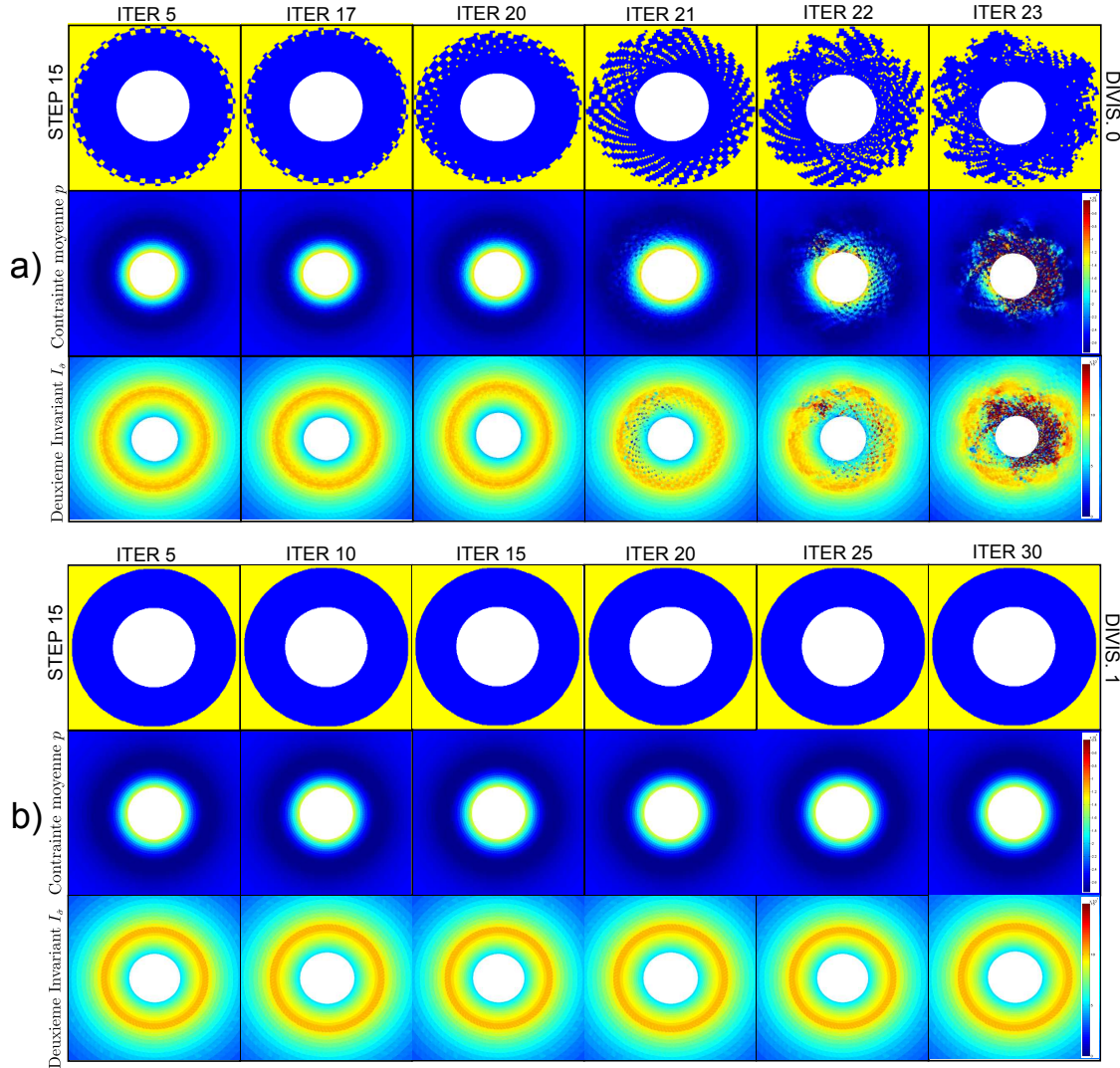


FIGURE 5.19 – État des points de Gauss et des contraintes pendant les itérations (pas 15).

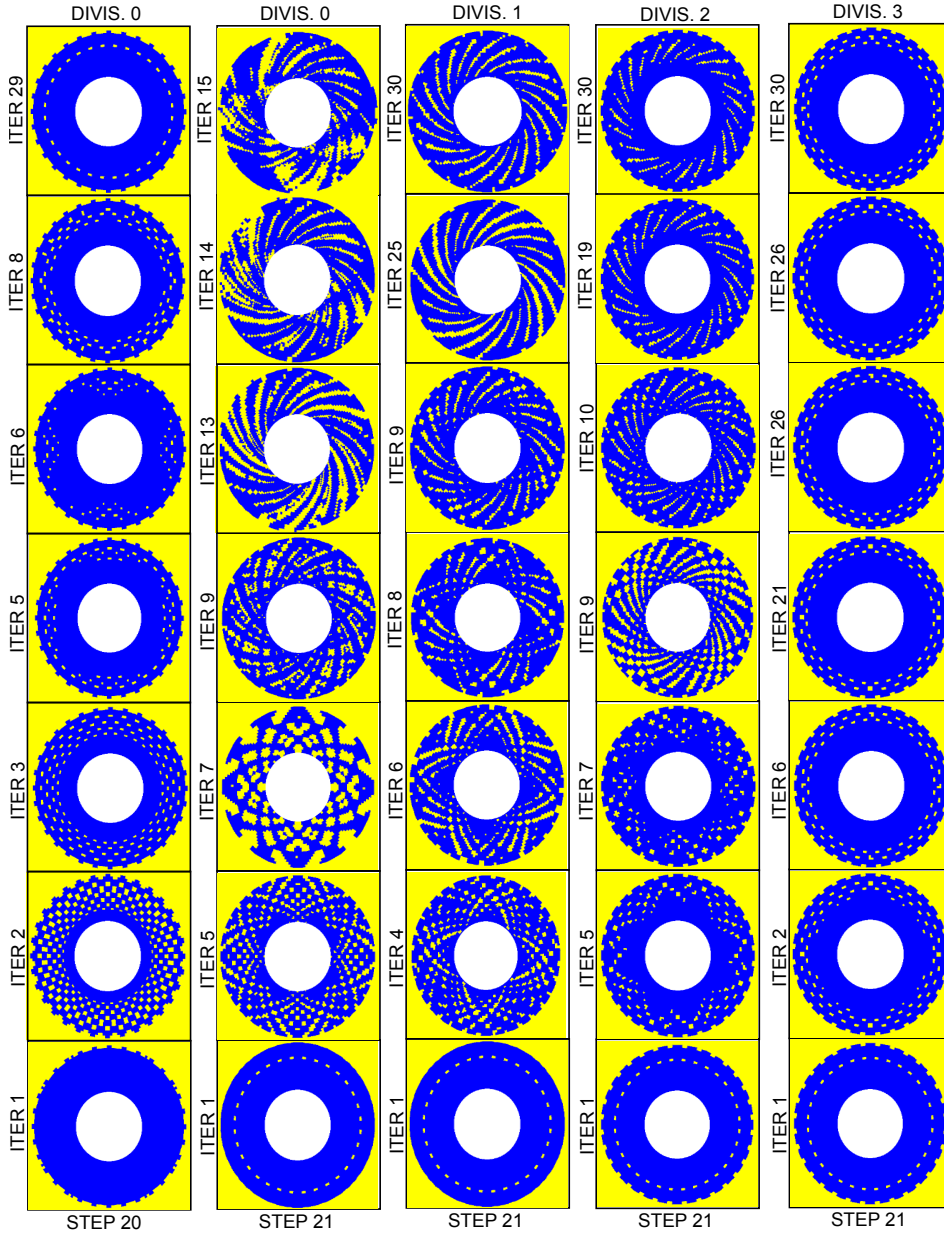
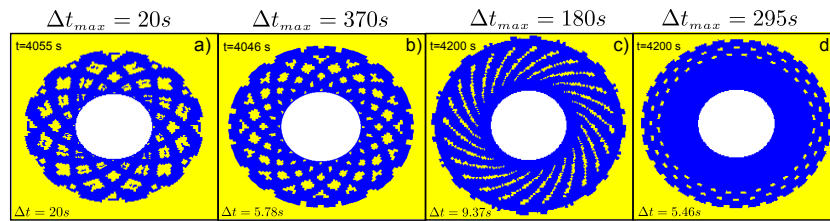


FIGURE 5.20 – Convergence du calcul pendant les itérations (step 20 et 21).


 FIGURE 5.21 – États de points de Gauss : solutions ultérieures trouvées avec changement de paramètres matériels, $\Delta t_{max} = \Delta t_o$.

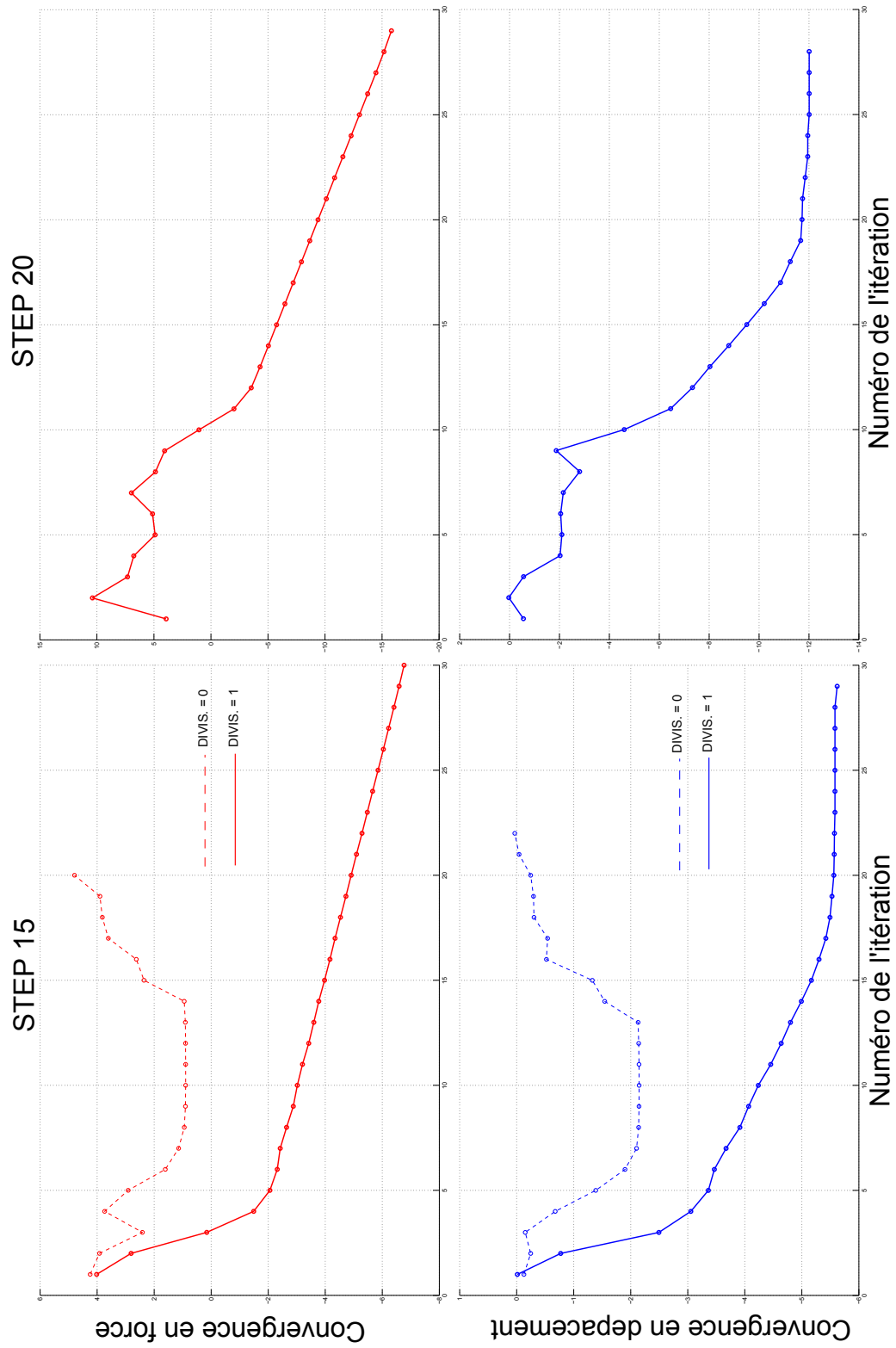


FIGURE 5.22 – Convergence du calcul ISO-2A, pour les pas 15 et 20 pour chaque division du pas (paramètres f_{conve} et d_{conve}).

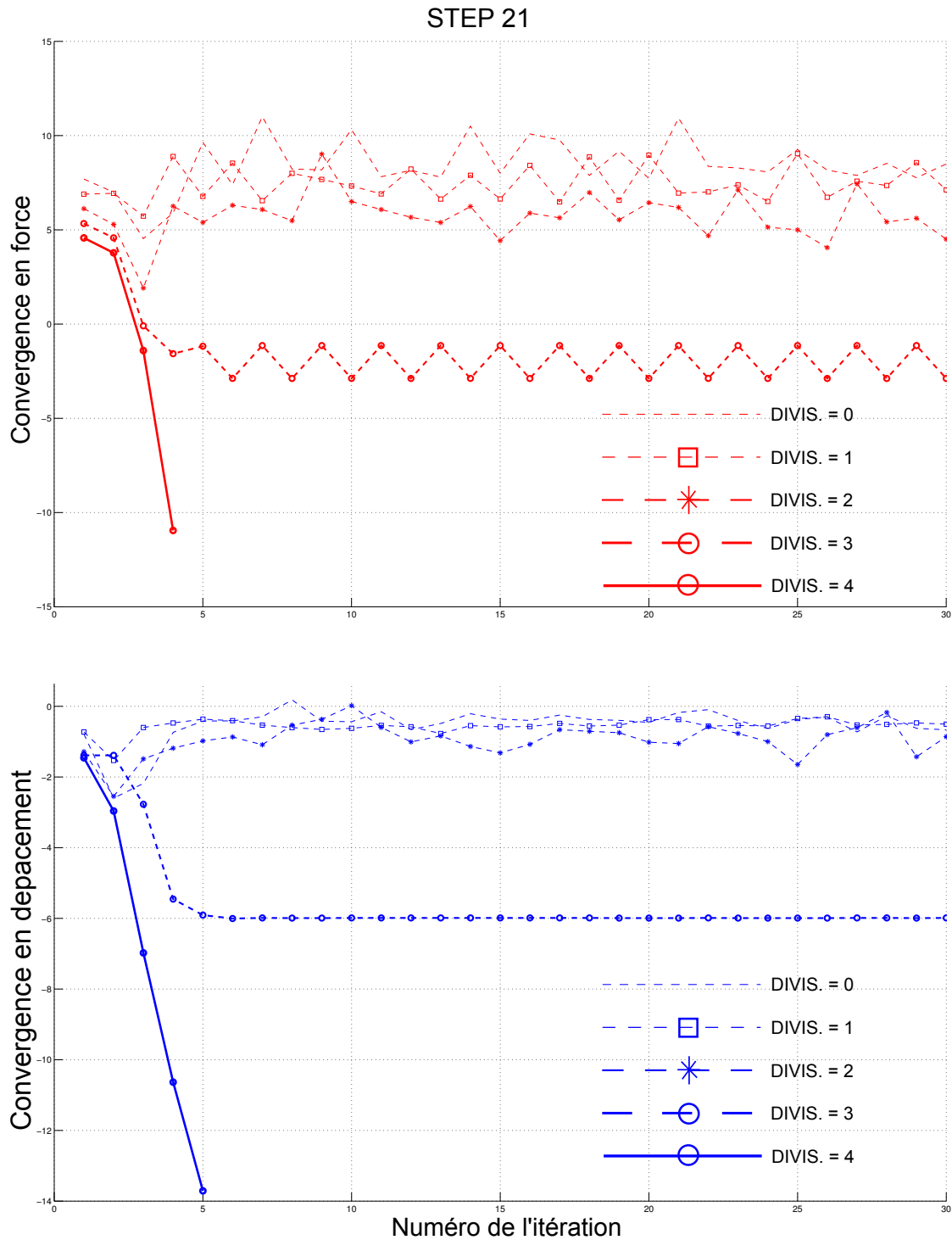


FIGURE 5.23 – Convergence du calcul ISO-2A, pour le pas 21 pour chaque division du pas (paramètres f_{conve} et d_{conve}).

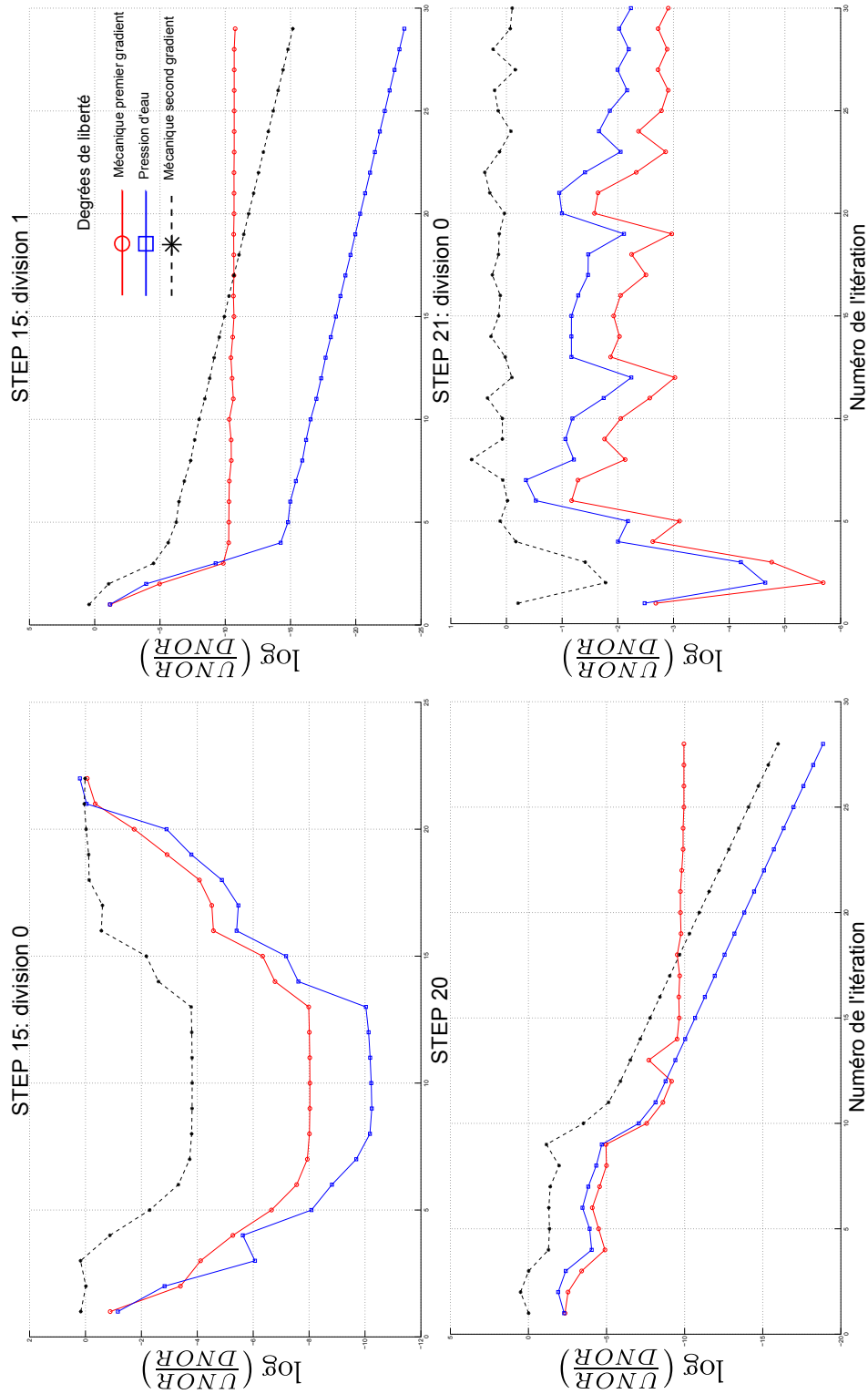


FIGURE 5.24 – Convergence des trois degrés de liberté pour les pas 15 et 20 du calcul ISO-2A.

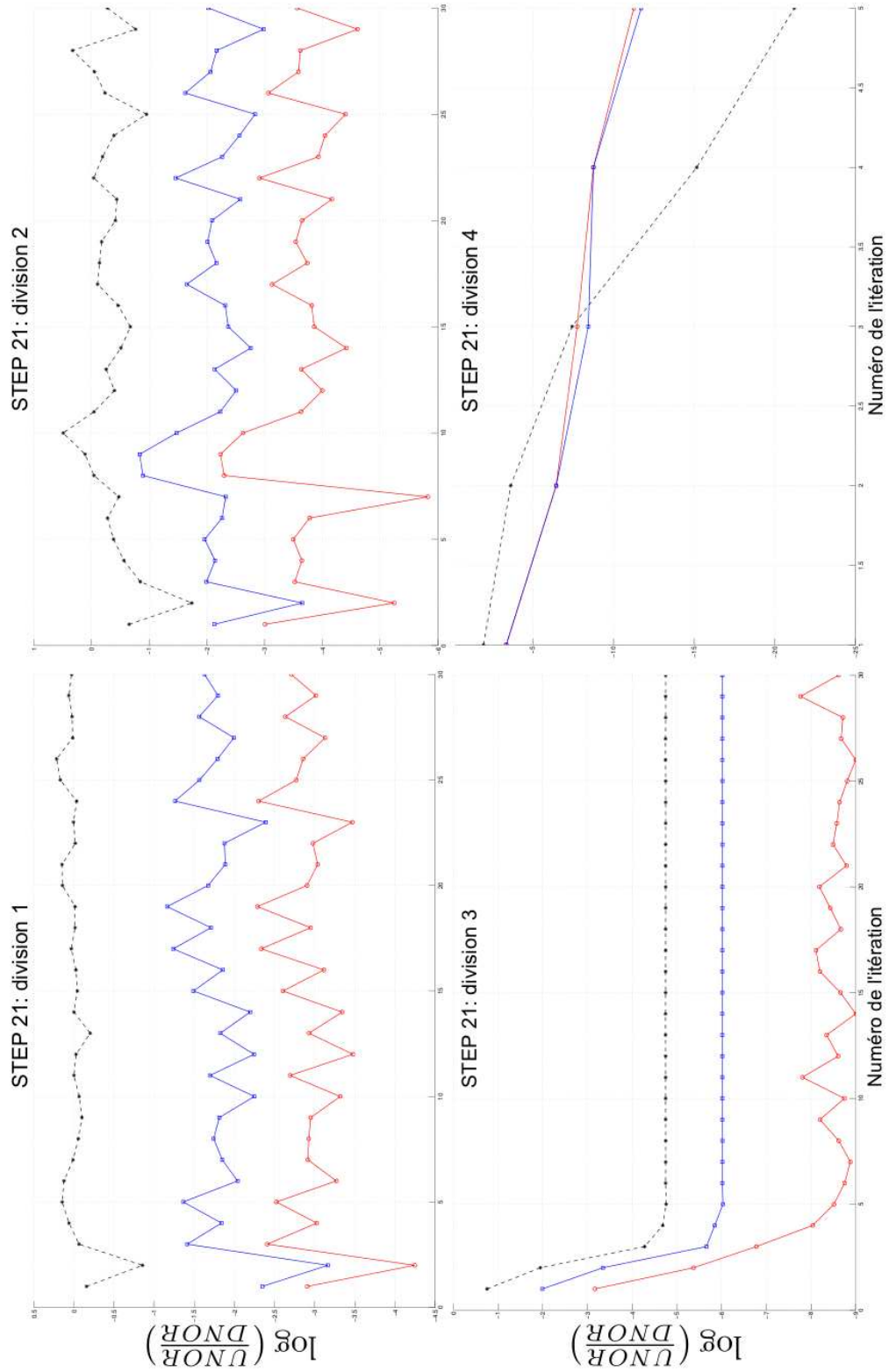


FIGURE 5.25 – Convergence des trois degrés de liberté pour le pas 21 du calcul ISO-2A.

5.4 Étude de non-unicité : loi de comportement Plasol anisotrope

Une des caractéristiques les plus importantes de l'argile de Boom est représentée par son comportement anisotrope dû au processus de déposition par couche des minéraux argileux (chapitre 3).

Afin de modéliser le caractère anisotrope de cette roche qui est bien visible dans les travaux expérimentaux de l'EPFL sur un cylindre creux, nous présentons dans cette section les résultats numériques atteints en utilisant la loi de comportement Plasol anisotrope (chapitre 4). Comme pour le cas isotrope, le problème de non unicité est traité en changeant la discrétisation temporelle du problème pour la modélisation de la phase A. Les paramètres mécaniques envisagés sont ceux du tableau 5.1. Le plan du lissage est imposé à zéro degrés ($\alpha = 0^\circ$, figure 4.11).

Comme pour les calculs faits avec la loi de comportement Plasol, nous allons montrer quatre solutions différentes qui présentent les localisations des déformations en bandes de cisaillement. Selon le mécanisme de déclenchement des déformations localisées, il est possible de classer les solutions trouvées de la même manière que pour le cas de la loi de comportement isotrope (section 5.3) :

1. Groupe 1.

Solution symétrique par rapport à l'axe horizontal et vertical.

2. Groupe 2.

Solution en bandes de cisaillement formée à partir d'une zone plastifiée fine autour du forage pour se développer vers l'extérieur au fur et à mesure de la décharge du forage (ANISO-1, ANISO-4 figure 5.26).

3. Groupe 3.

Solution en bandes de cisaillement qui se présente à partir de la décharge d'une grosse zone de points plastifiés (ANISO-2, ANISO-3 figure 5.6).

La phase de stabilisation est aussi modélisée pour étudier la propagation des bandes de cisaillement au cours du temps. Un ensemble des solutions trouvées est montré en figure 5.26 en incluant aussi la solution symétrique par rapport aux axes vertical et horizontal. Dans l'annexe B.1.4 nous proposons l'évolution de l'état des points de Gauss (figures B.16, B.17, B.18 et B.19) et des déformations plastiques équivalentes ε_{eq}^p (figures B.20, B.21, B.22 et B.23) de façon plus détaillée .

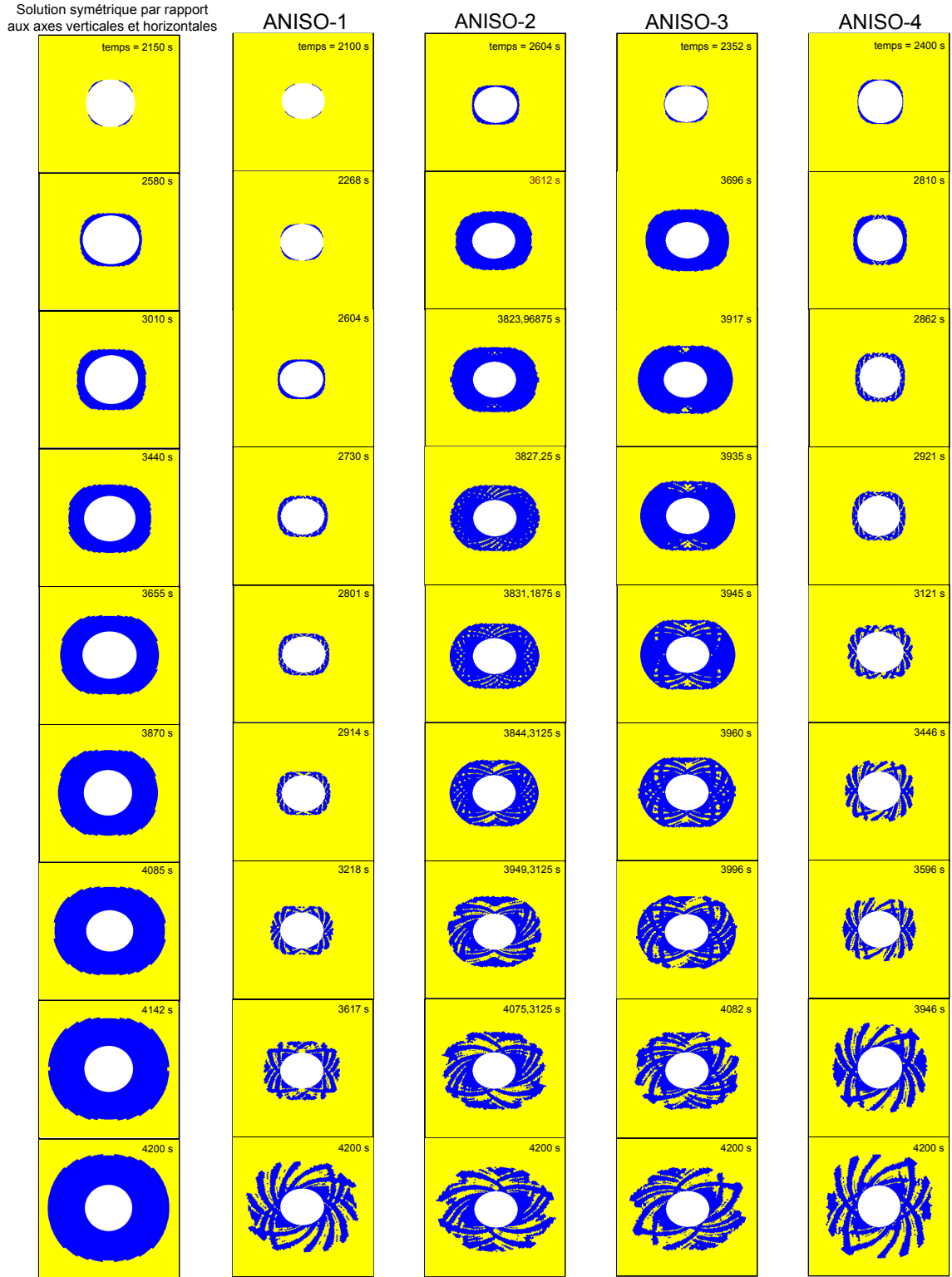


FIGURE 5.26 – Évolution des quatre solutions trouvées pour la phase A : points de Gauss en charge plastique (en bleu), en charge-décharge élastique (en jaune).

5.4.1 Déchargement du forage : phase A

Comme expliqué dans la section 4.5, l'introduction de l'isotropie transversale sur le comportement élastique apporte une contribution anisotrope importante au niveau du comportement élasto-plastique du milieu.

Parmi tous les calculs faits, quatre solutions ont été envisagées pour montrer la non-unicité du problème aux conditions aux limites sur un cylindre creux pour la phase de décharge. Ces quatre solutions ont été trouvées en changeant l'initialisation de l'algorithme de Newton-Raphson à travers un changement de données sur la gestion de la taille du pas. Elles sont montrées dans les figures 5.27 et 5.28 où il est possible d'observer qu'elles sont toutes caractérisées par une structure à bandes conjuguées. Les données sur la discrétisation temporelle sont montrées dans le tableau 5.4. Δt_{max}^* et Δt_{min}^* représentent la taille du pas maximale et minimale atteinte par les quatre calculs.

Calcul	Grp	Δt_o	Δt_{min}	Δt_{max}	Δt_{min}^*	Δt_{max}^*	n° bnds	bnds
ANISO-1A	2	42	0.001	84	1.3125	84	16	Con.
ANISO-2A	3	42	0.001	840	0.328125	672	14	Con.
ANISO-3A	3	168	0.001	1680	0.4921875	672	12	Con.
ANISO-4A	2	8.4	0.001	8.4	2.1	4.2	14	Con.

TABLE 5.4 – Données pour la gestion de la discrétisation temporelle du calcul

Même pour la loi de comportement anisotrope, les solutions qui présentent des déformations localisées se déclenchent principalement selon deux mécanismes qui caractérisent les solutions du groupe 2 et les solutions du groupe 3, comme présenté dans la section 5.3. De façon équivalente aux cas avec la loi de comportement Plasol, les solutions ANISO-1A et ANISO-4A appartiennent au groupe de solutions 2 alors que les solutions ANISO-2A et ANISO-3A appartiennent aux solutions du groupe 3.

En figure 5.29 nous pouvons observer l'évolution de la solution pour les calculs ANISO-1A et ANISO-3A. Il est nécessaire de remarquer qu'autour du forage les deux calculs présentent une zone plastifiée symétrique par rapport aux axes x et y avant de présenter des points en décharge dans la zone plastifiée. Dès que les premiers points de Gauss ont un comportement en décharge élastique cette symétrie est perdue au cours de tout le calcul.

Les premiers points en charge plastique apparaissent aux environs de 50 degrés par rapport à l'axe x puisque cette zone représente la zone dans laquelle l'effort déviatorique est majeur. Au fur et à mesure du déchargement, la zone plastifiée se propage autour du forage du cylindre creux avec une forme ovale jusqu'à ce que certains points commencent à se décharger et que des bandes de cisaillement se déclenchent.

L'ovalisation de la région plastifiée montre que l'introduction de l'élasticité transversale apporte une contribution anisotrope importante bien visible si nous comparons ces solutions avec celles obtenues avec la loi constitutive Plasol.

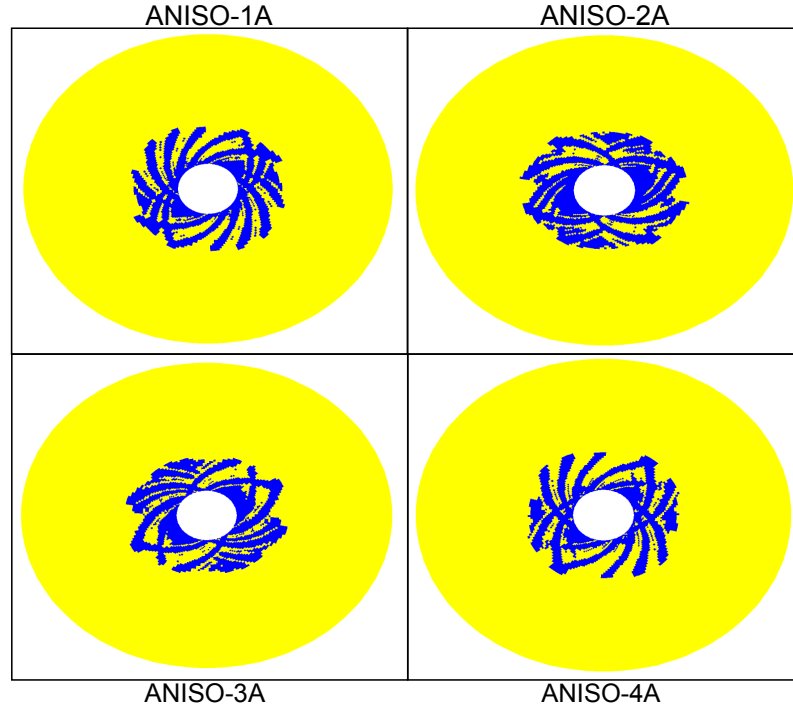


FIGURE 5.27 – Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : points en charge plastique (en bleu), en charge-décharge-plastique (en jaune).

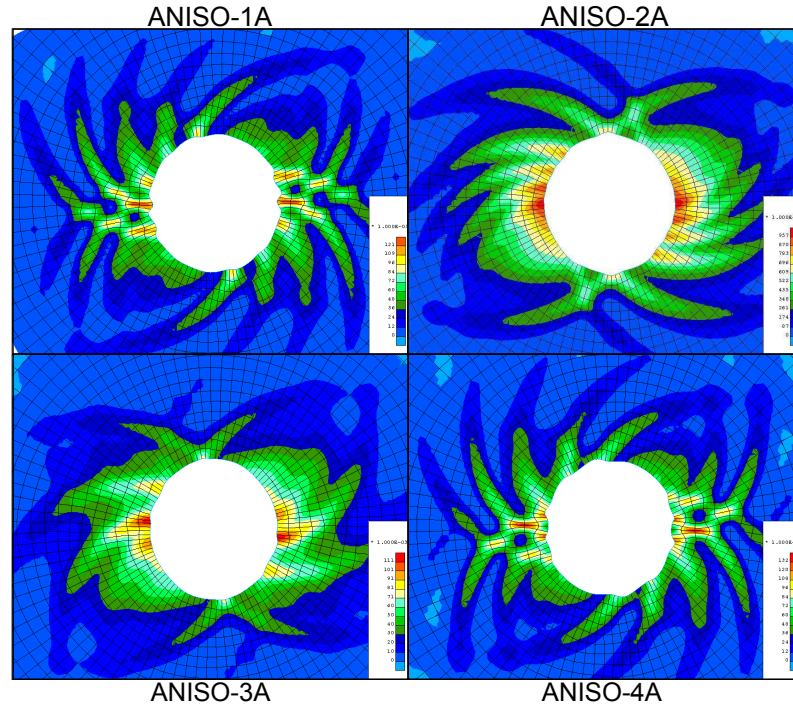


FIGURE 5.28 – Solution du problème à la fin de la phase A, $t=4200$ s : déformation plastique équivalente ε_{eq}^p .

Nous remarquons aussi qu'à la différence du cas isotrope, les solutions qui appartiennent au groupe 3 ne présentent pas une distribution axysymétrique pour les premiers points en décharge élastique qui se disposent sur le bord supérieur et inférieur de la zone plastifiée du cylindre creux ($t=3934$ s).

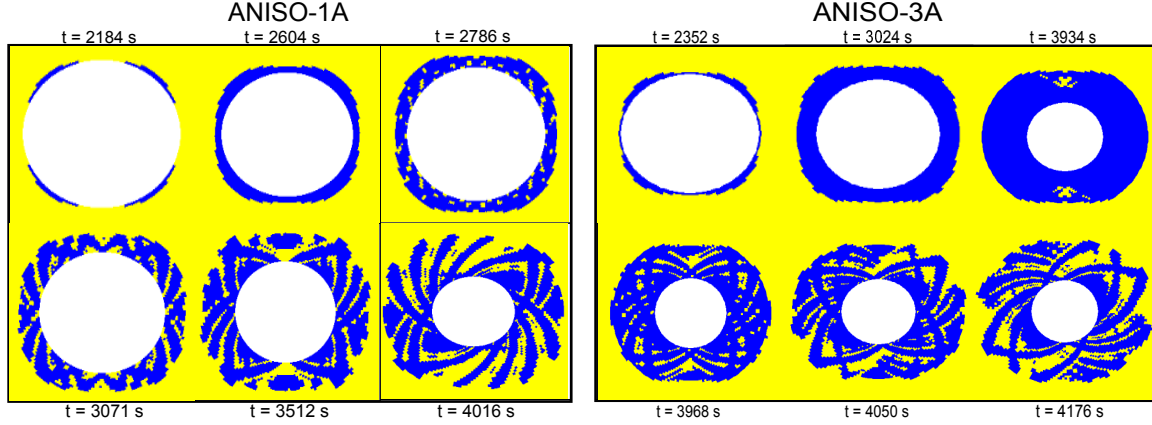


FIGURE 5.29 – Évolution du calcul ANISO-1A et ANISO-3A : points en charge plastique (en bleu) et en charge-décharge élastique (en jaune) pour la phase A.

5.4.2 Stabilisation : phase B

Les solutions pour le modèle Plasol anisotrope à la fin de la phase B ($t=45000$ s) sont montrées en figures 5.30 et 5.31. Comme pour les cas avec la loi Plasol les bandes continuent à se charger arrivant jusqu'aux deux-tiers du rayon cylindre creux.

Dans le calcul ANISO-1B, la localisation en bandes de cisaillement se présente avec des bandes en spirales puisque les bandes conjuguées qui se présentent à la fin de la phase A sont désactivées. La même considération peut être faite pour le calcul ANISO-3B même si deux bandes conjuguées sont encore présentes.

Toutes les solutions ont en commun l'influence du plan d'anisotropie à la fois sur l'évolution des bandes et sur la direction d'accumulation des déformations plastiques. Dans le cas isotrope, la courbure des bandes de cisaillement est constante pour toutes les solutions alors que dans le cas anisotrope les bandes tendent vers le plan d'anisotropie identifié par la direction x . Parmi les quatre calculs, ANISO-2B est celui dans lequel l'influence du plan d'anisotropie est la plus visible.

Ces différences avec la loi de comportement Plasol sont aussi nettement remarquées en figure 5.31 où la déformation plastique équivalente ε_{eq}^p est montrée dans la configuration déformée. Due à une majeure concentration de déformations plastiques le long de x , la déformée du forage présente dans tous les cas une ovalisation verticale à la différence du cas isotrope où l'intérieur du forage reste approximativement rond.

Toutes les solutions présentent une sorte de symétrie, notamment le calcul ANISO-2B où cette symétrie apparaît par rapport à l'axe x .

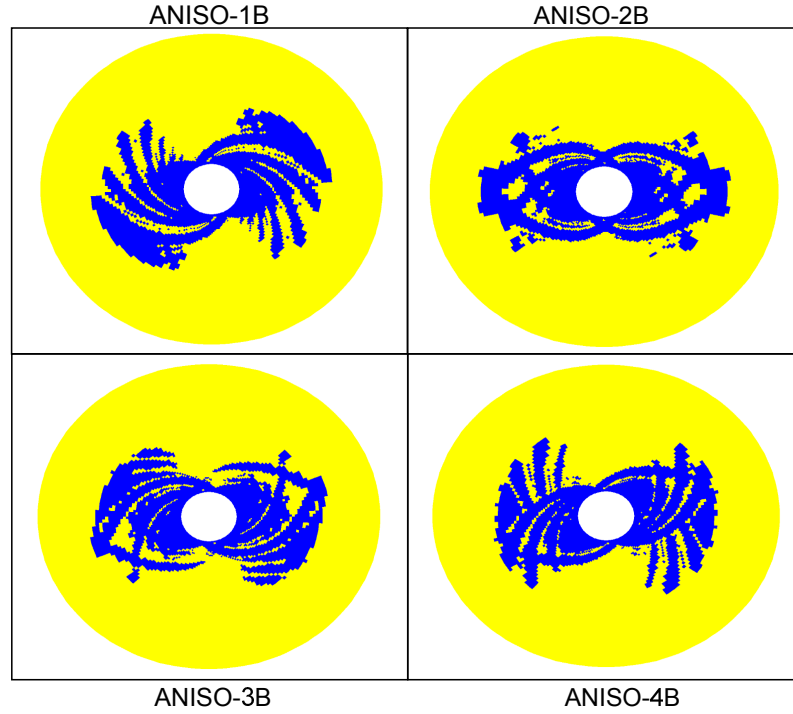


FIGURE 5.30 – Solution du problème à la fin de la phase B, $t=4200$ s : points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge (en jaune)

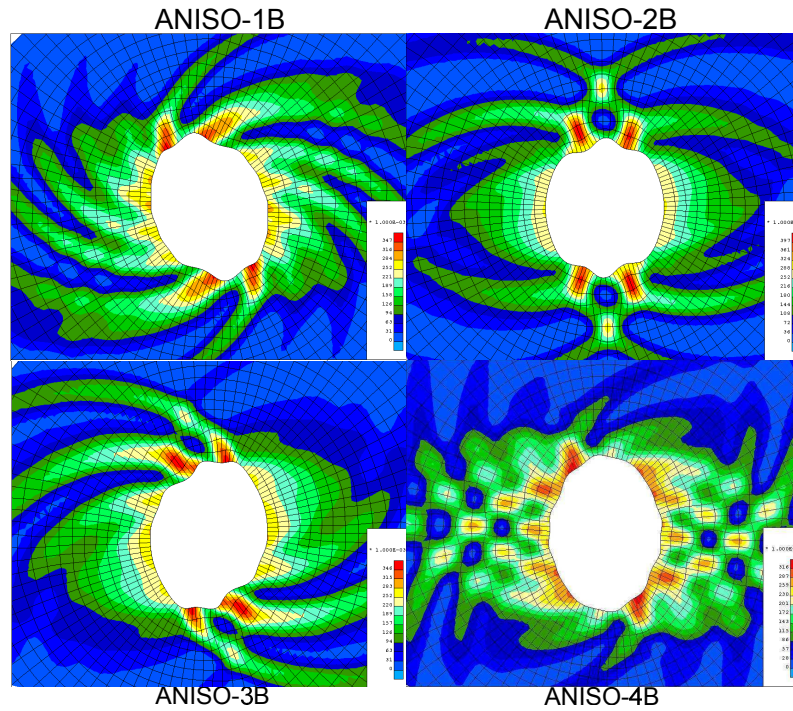
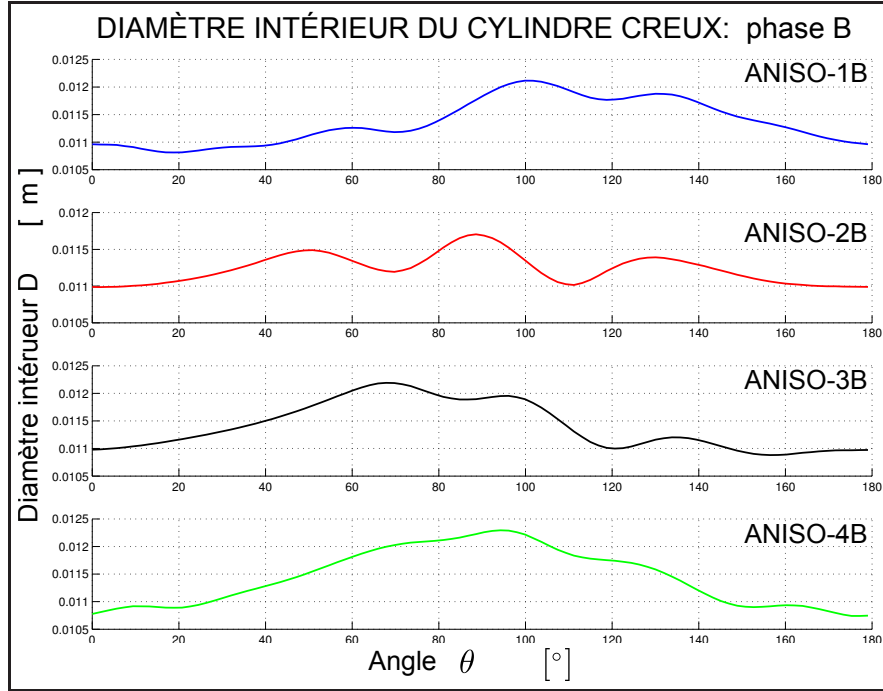


FIGURE 5.31 – Solution du problème à la fin de la phase B, $t=4200$ s : déformation plastique équivalente ε^p_{eq}

FIGURE 5.32 – Diamètre intérieur du cylindre creux $D_{int} = f(\theta)$ (phase B)

5.4.3 Convergence numérique du problème

Tous les résultats concernant la convergence faite pour les calculs avec la loi de comportement isotrope peuvent être observés pour les calculs avec la loi de comportement Plasol anisotrope. Elles sont listées sous forme de résumé ci-dessous :

- Dès que les calculs montrent des déformations plastiques le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la solution augmente en raison des degrés de liberté sur la partie second gradient qui a besoin de plusieurs itérations pour arriver à convergence. Cela est bien visible en figure 5.33.
- Puisque la discrétisation temporelle du calcul est automatique, lorsque le calcul commence à présenter des points en charge plastique, décharge élastique, il n'arrive plus à converger avec le Δt du pas précédent donc la taille du pas de temps est divisé plusieurs fois. Cette division du Δt est bien visible en figure 5.34 où elle marque un plateau dans la courbe temps-nombre du pas.
- Les valeurs des paramètres de convergence f_{conve} et d_{conve} sont montrées en figures 5.35 et 5.36 pour le calcul ANISO-2. Dans l'annexe B.1.3 nous avons présenté f_{conve} et d_{conve} pour les calculs ANISO-1, ANISO-3, ANISO-4. Dans la phase B la convergence tend à être meilleure au fur et à mesure du temps puisque le parcours de localisation est déjà bien défini. Cet aspect est nettement observable en figures 5.33 et 5.34.

- L'état des points de Gauss et des contraintes ont été étudiés pour les pas 11 et 14 (figure 5.37). Une étude de convergence est aussi envisagée pour ces pas en figure 5.34 dont l'évolution ressemble à la convergence des pas 15 et 20 du calcul ISO-2A. Dans tous les cas, la vitesse quadratique de convergence est perdue. L'évolution de la solution pour le pas 16 et 17 est montrée en figure 5.39.

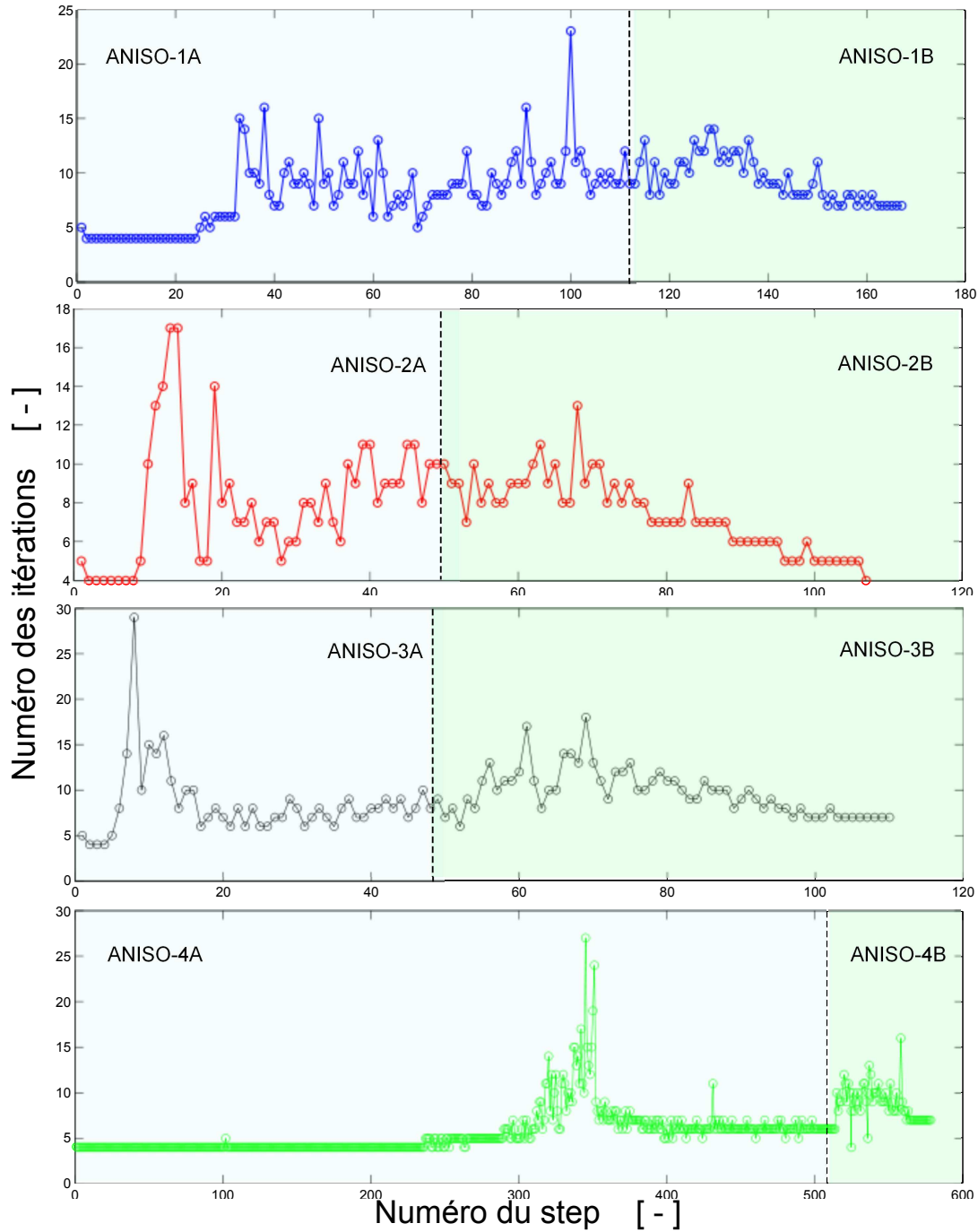


FIGURE 5.33 – Convergence du problème : nombre d'itérations pour chaque pas.

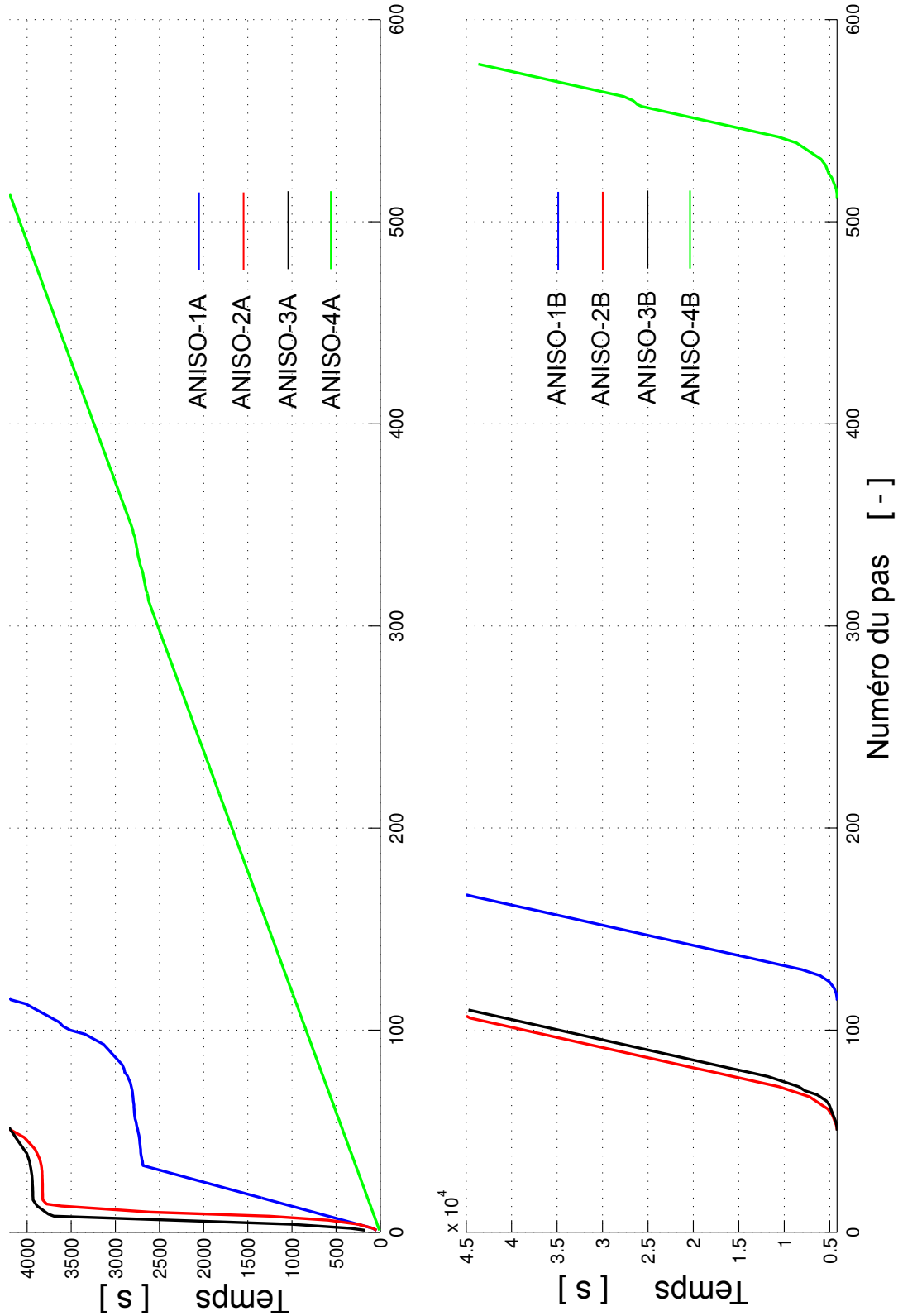


FIGURE 5.34 – Convergence du problème : nombre du pas par rapport au temps du calcul.

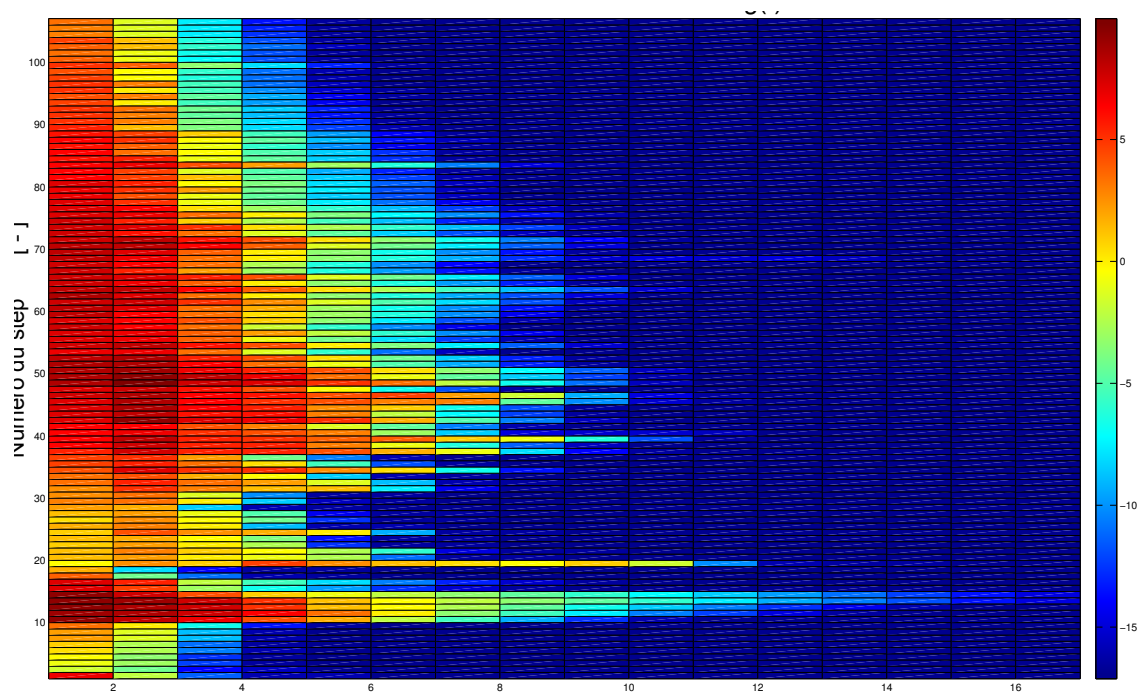


FIGURE 5.35 – Convergence en force : calcul ANISO-2A,B

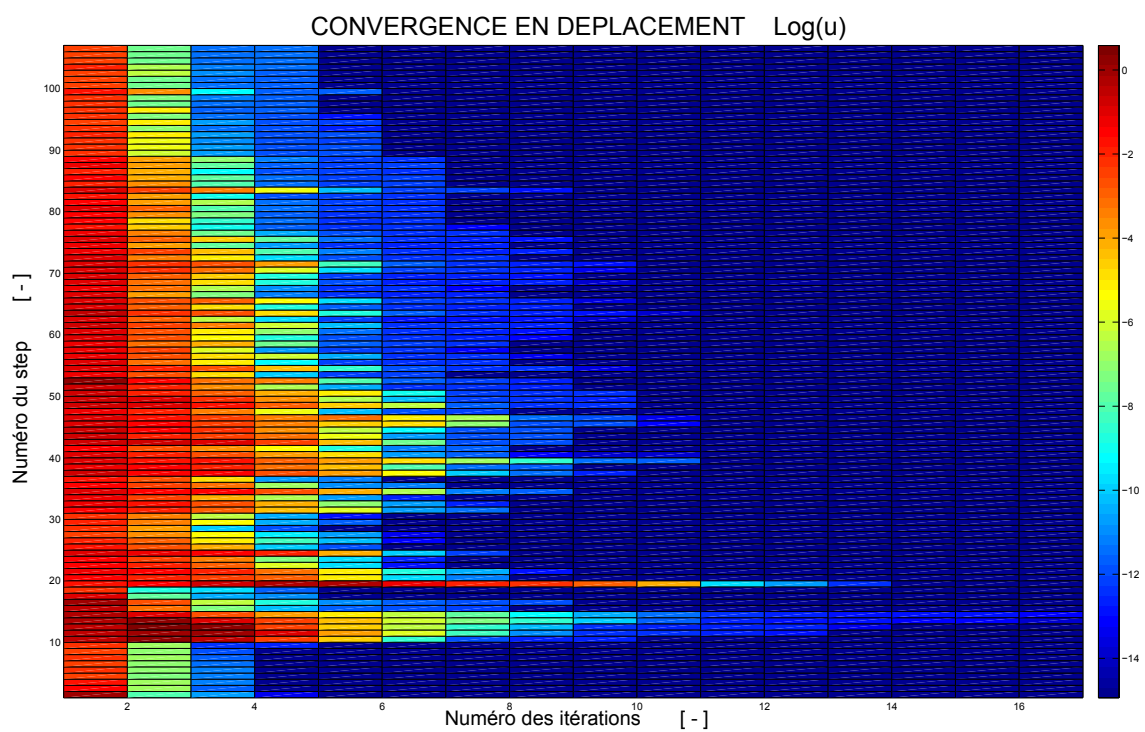


FIGURE 5.36 – Convergence en déplacement : calcul ANISO-2A,B

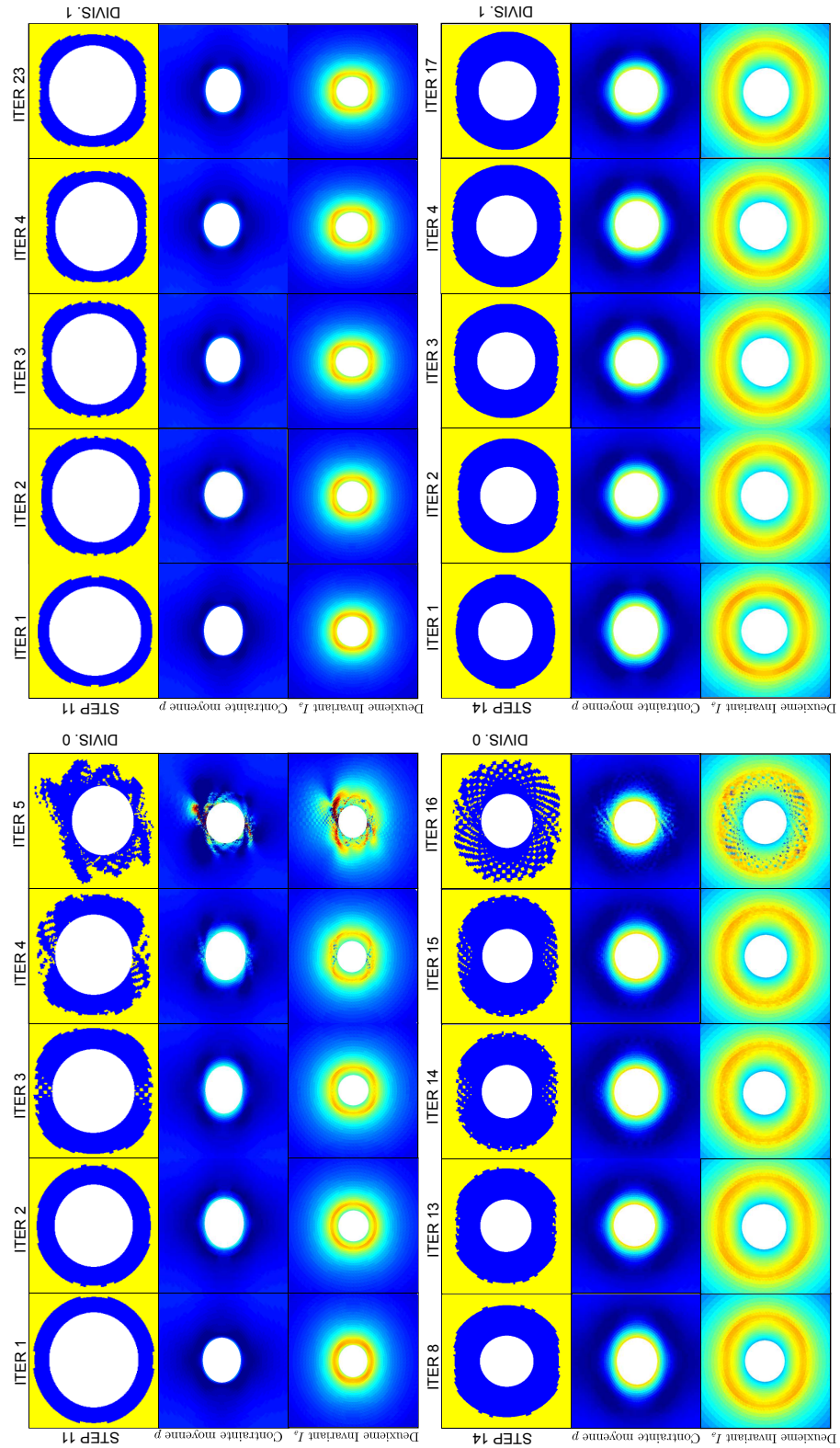


FIGURE 5.37 – Points en charge plastique (bleu), décharge élastique (jaune), pendant les itérations.

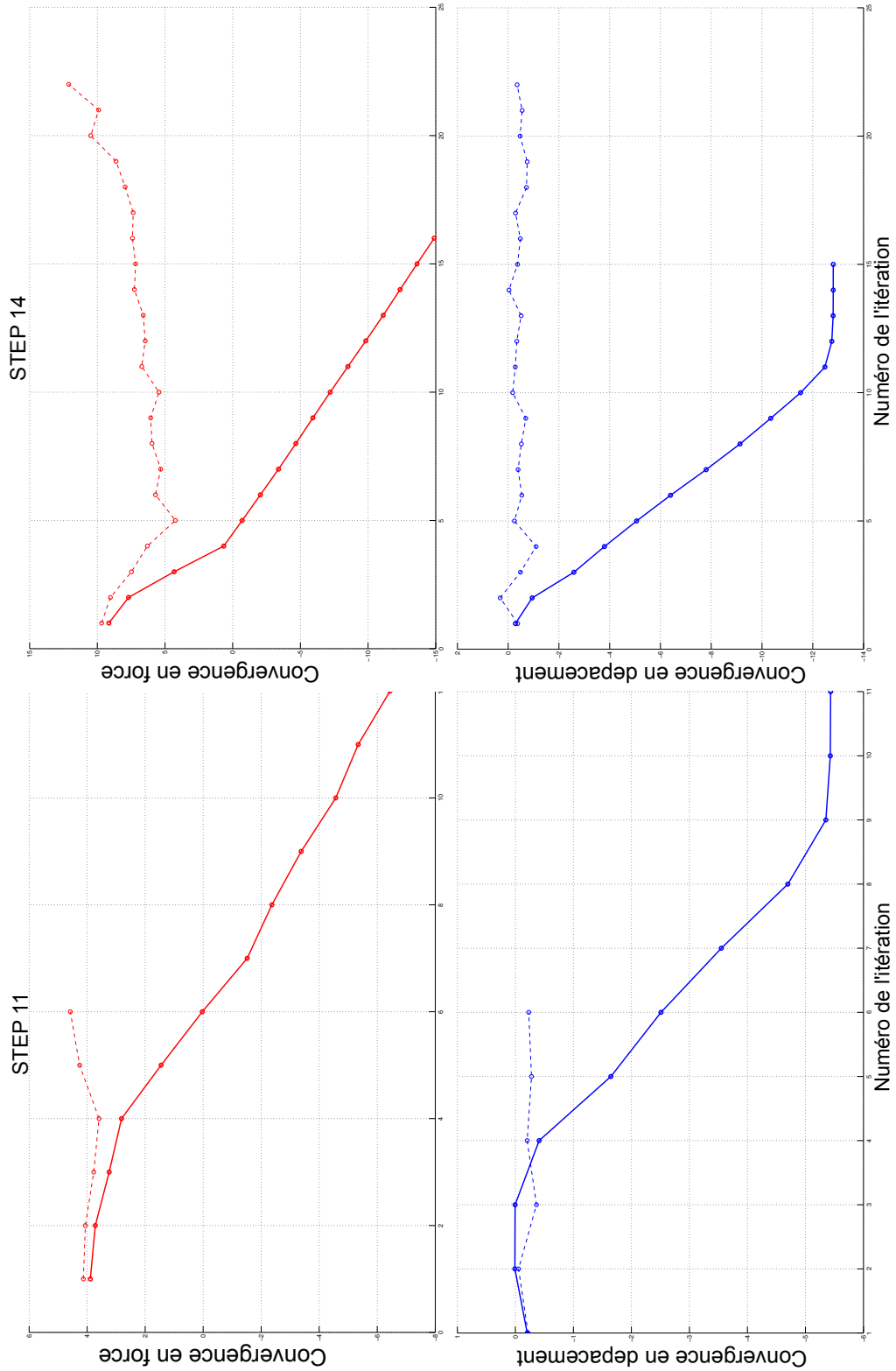


FIGURE 5.38 – Convergence du calcul ANISO-2A, pour les pas 11 et 14 pour chaque division du pas de temps (paramètres f_{conve} et d_{conve}).

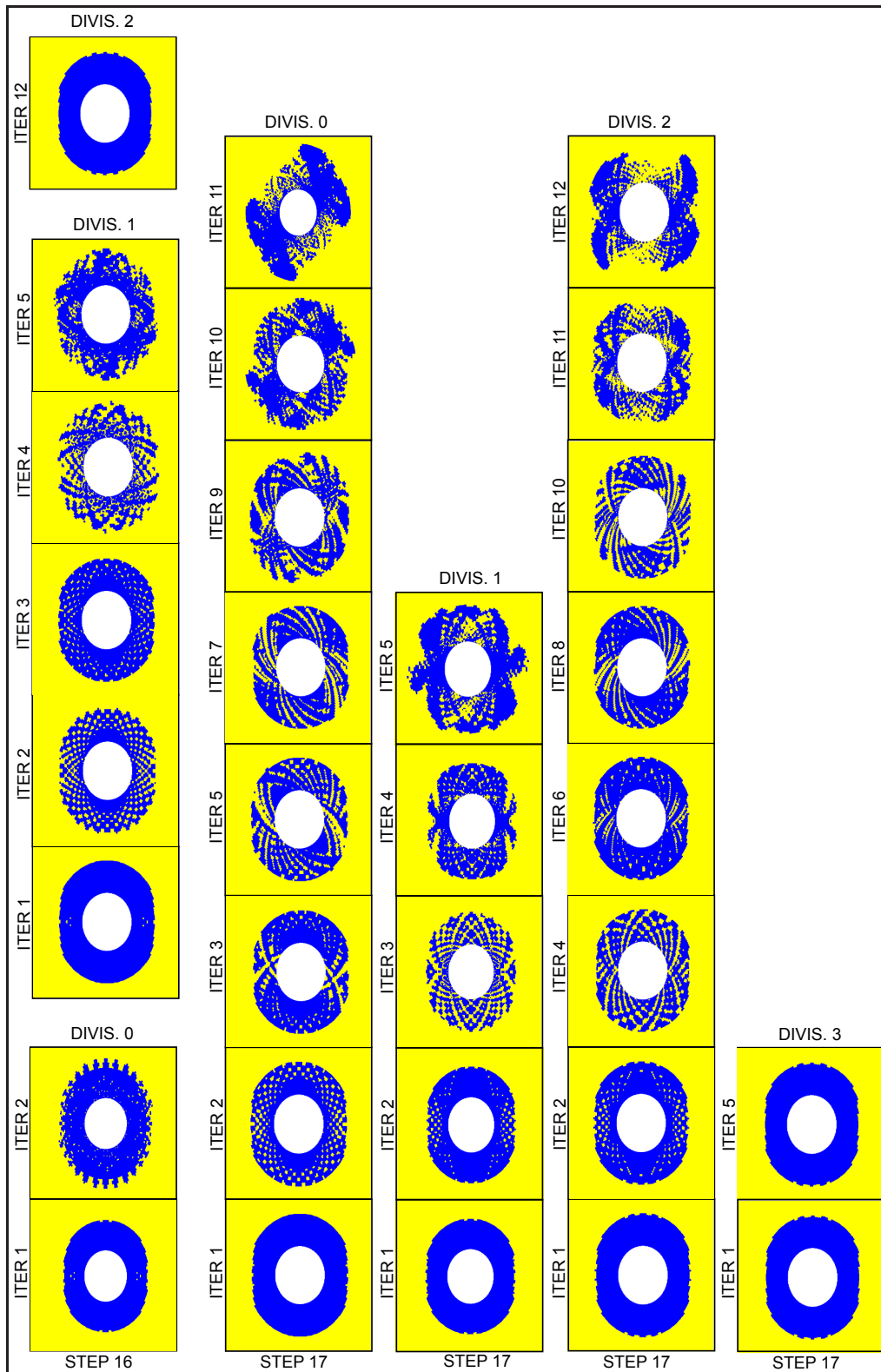


FIGURE 5.39 – Convergence du calcul ANISO-2A au cours des itérations, pas 16 et 17 : état des points de Gauss.

5.5 Comportement hydraulique

L'évolution de la pression d'eau dans le cylindre creux est montré en figure 5.40 sur les rayons horizontaux et verticaux à la fin de la phase A et de la phase B du déchargement. Les différentes raideurs entre la loi de comportement Plasol et Plasol anisotrope modifient le comportement dilatant entre les rayons vertical et horizontal ce qui fait changer les valeurs de la pression le long ces directions.

En effet le rayon horizontal pour le cas anisotrope montre des gradients de pression supérieurs par rapport au cas isotrope puisque le module de Young le long de cette direction est supérieur de celui du cas isotrope. Au contraire le long de la direction verticale la pression d'eau du modèle isotrope montre des incréments majeurs par rapport au cas anisotrope étant le module de Young plus grand que celui du cas anisotrope sur cette direction.

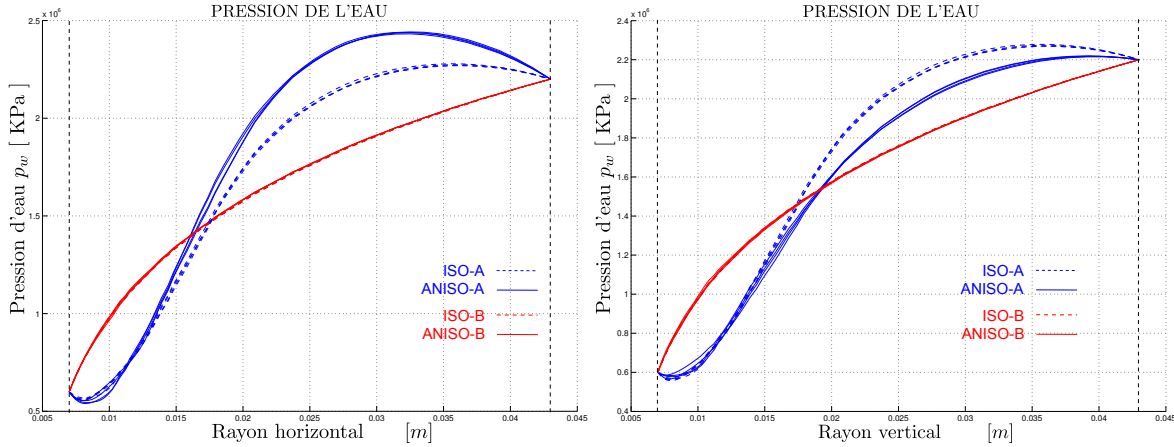


FIGURE 5.40 – Pression d'eau sur les rayons horizontaux et verticaux pour les quatre solutions avec les lois de comportement Plasol et Plasol anisotrope.

Ces différences sont négligeables à la fin de la phase B comme montré en figure 5.40 (courbe rouge). L'évolution pour différents temps est affichée pour les quatre calculs dans les annexes B.1.2 et B.1.5.

Il est possible de remarquer que la pression d'eau pour les deux lois de comportement utilisées ne montre aucune différence remarquable entre les quatre solutions ; pourtant à cause du comportement dilatant du milieu, la distribution de la pression autour du forage montre une dépendance par les différents chemins de localisation comm'il est possible d'observer en figures 5.41 et 5.42.

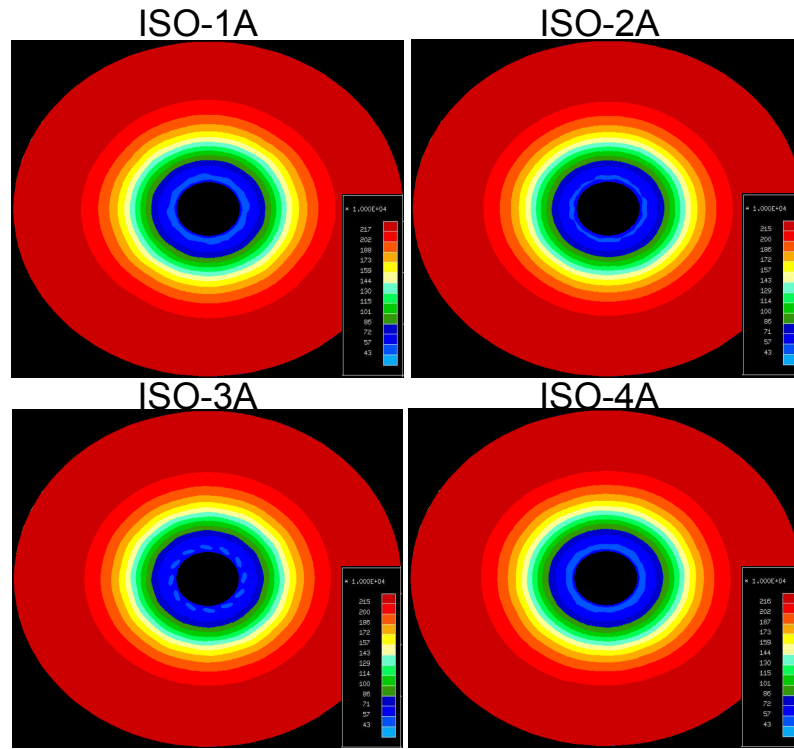


FIGURE 5.41 – Distribution de la pression d'eau à la fin de la phase A

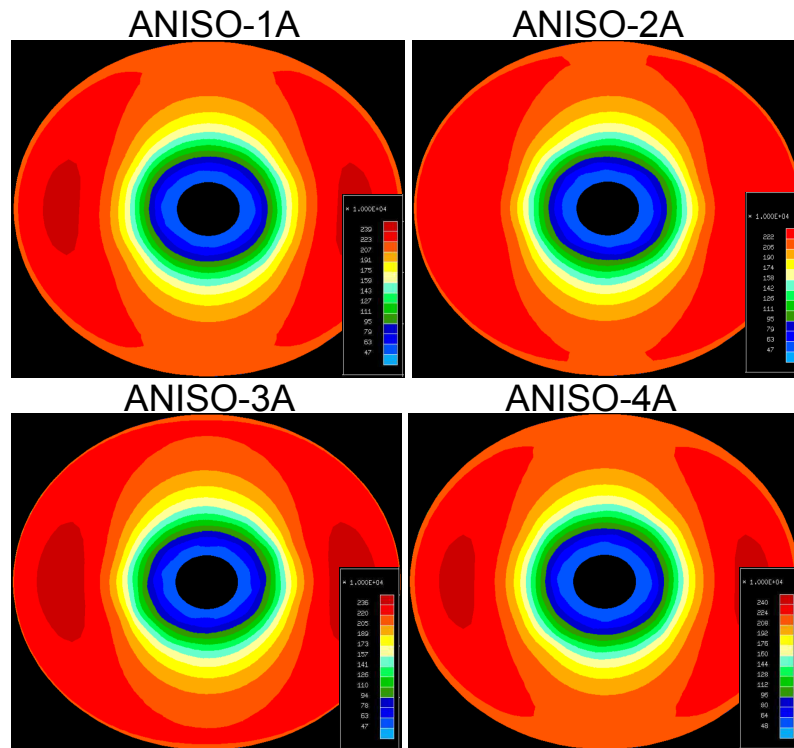


FIGURE 5.42 – Distribution de la pression d'eau à la fin de la phase A

5.6 Changement de la discrétisation temporelle du problème

Les solutions au problème sur le cylindre creux qui présentent des bandes de cisaillement peuvent être classifiées en deux groupes de solutions. Le groupe 2, caractérisé par des déformations localisées qui se forment à partir d'une zone plastifiée très fine et qui s'élargissent vers l'extérieur avec le temps, et le groupe 3, où les bandes de cisaillement apparaissent comme décharge d'une grande zone plastifiée autour du forage.

Nous avons remarqué que les solutions qui appartiennent au groupe 2 (ISO-1A, ISO-4A et ANISO-1A, ANISO-4A) sont caractérisées par une taille maximale du pas Δt_{max} nettement inférieure que les solutions qui appartiennent au groupe 3. Le paramètre Δt_{max} semble être celui qui influence le plus le choix de la solution pendant la suite du calcul.

Pour comprendre l'influence de la taille maximale du pas Δt_{max} par rapport au type de solution atteinte par le calcul (groupe 1, groupe 2 ou groupe 3) nous avons lancé une série de 60 calculs avec la loi de comportement Plasol. Dans ces calculs nous avons imposé des paramètres pour la discrétisation temporelle du problème tel que $\Delta t_{max} = \Delta t_o$. Une différence de 10 secondes sur la taille maximale du pas de temps a été envisagée entre un calcul et le suivant en partant de $\Delta t_{max} = \Delta t_o = 10s$ jusqu'à $\Delta t_{max} = \Delta t_o = 600s$.

Les figures 5.43 et 5.44 montrent de façon qualitative la relation entre la discrétisation temporelle envisagée et le groupe de solution auquel le calcul appartient. Il est possible d'observer que les calculs faits avec une taille maximale du pas compris entre 10 s et 300 s peuvent amener à la fois à des solutions du groupe 2 et à des solutions du groupe 3 : toutes les deux sont possibles. Pour les calculs avec un Δt_{max} compris entre 310 s et 600 s les solutions qui appartiennent au groupe 2 ne se présentent jamais et les seules solutions que nous constatons sont celles du groupe 2 et du groupe 3.

Afin de comprendre pourquoi la valeur de Δt_{max} peut influencer la solution du problème numérique nous envisageons que tous les calculs ont été faits avec l'hypothèse d'estimer la position des coordonnées nodales à la première itération d'un pas, en utilisant le champ de vitesse du pas précédent (équation 5.5). Cette hypothèse est normalement utilisée parce qu'elle représente l'estimation plus performante pour des chargements monotones au niveau des nombres d'itérations utilisés par l'algorithme de Newton-Raphson pour trouver la solution sur un pas de temps.

$$x_j^{n^{i=1}} = x_j^{n-1} + v_j^{n-1} \Delta t_n \quad (5.5)$$

Dû au fait que $\Delta t_{max} = \Delta t_o$, le calcul avance avec des pas de taille constante puisque la taille maximale du pas est déjà atteinte. Quand il arrive là où l'état du milieu est élasto-plastique comme pour tous les pas, il démarre la première itération en utilisant

l'hypothèse sur les vitesses du pas précédent. À cause de cette hypothèse d'initialisation des coordonnées nodales deux considérations peuvent être faites :

- Si la taille du pas est grand, le milieu présente tout de suite une grosse zone plastifiée autour du forage, ce qui implique que seul le groupe des solutions 1 et 3 peut être trouvé, comme montré par les courbes rouges et noires de figure 5.43.
- Si la taille du pas maximale n'est pas trop grande, le calcul peut atteindre les solutions du groupe 2 et 3. La figure 5.43 montre que pour ces valeurs la solution axiale symétrique ne se présente jamais et les seules solutions possibles sont celles qui présentent les localisations des déformations.

Afin de bien comprendre l'importance de l'hypothèse faite sur l'initialisation des coordonnées nodales en début de pas, nous comparons ce problème aux éléments finis avec le problème à un degré de liberté montré dans la section 2.5. En résolvant avec un algorithme de Newton-Raphson l'équation 2.125, selon la valeur avec laquelle nous initialisons l'algorithme, il peut arriver à trouver différentes racines de l'équation. L'ensemble de ces valeurs représente le bassin d'attracteur de Newton qui délimitent la fractale de Newton.

La nature du problème que nous résolvons aux éléments finis est exactement la même que celle de l'équation polynomiale 2.125. À la différence de celle-ci, le problème aux éléments finis est caractérisé par des milliers de degrés de liberté, le rendant plus complexe que le problème sur le polynôme. Dans ce cas le choix de la valeur initiale qui démarre le processus itératif de Newton-Raphson est proposé par l'utilisateur de l'algorithme alors que dans le problème aux éléments l'initialisation du problème est choisie a priori entre les hypothèses montrées dans la section 2.5. Pour les calculs montrés dans ce chapitre nous avons choisi d'initialiser les coordonnées nodales à la première avec le champ de vitesse du pas précédent.

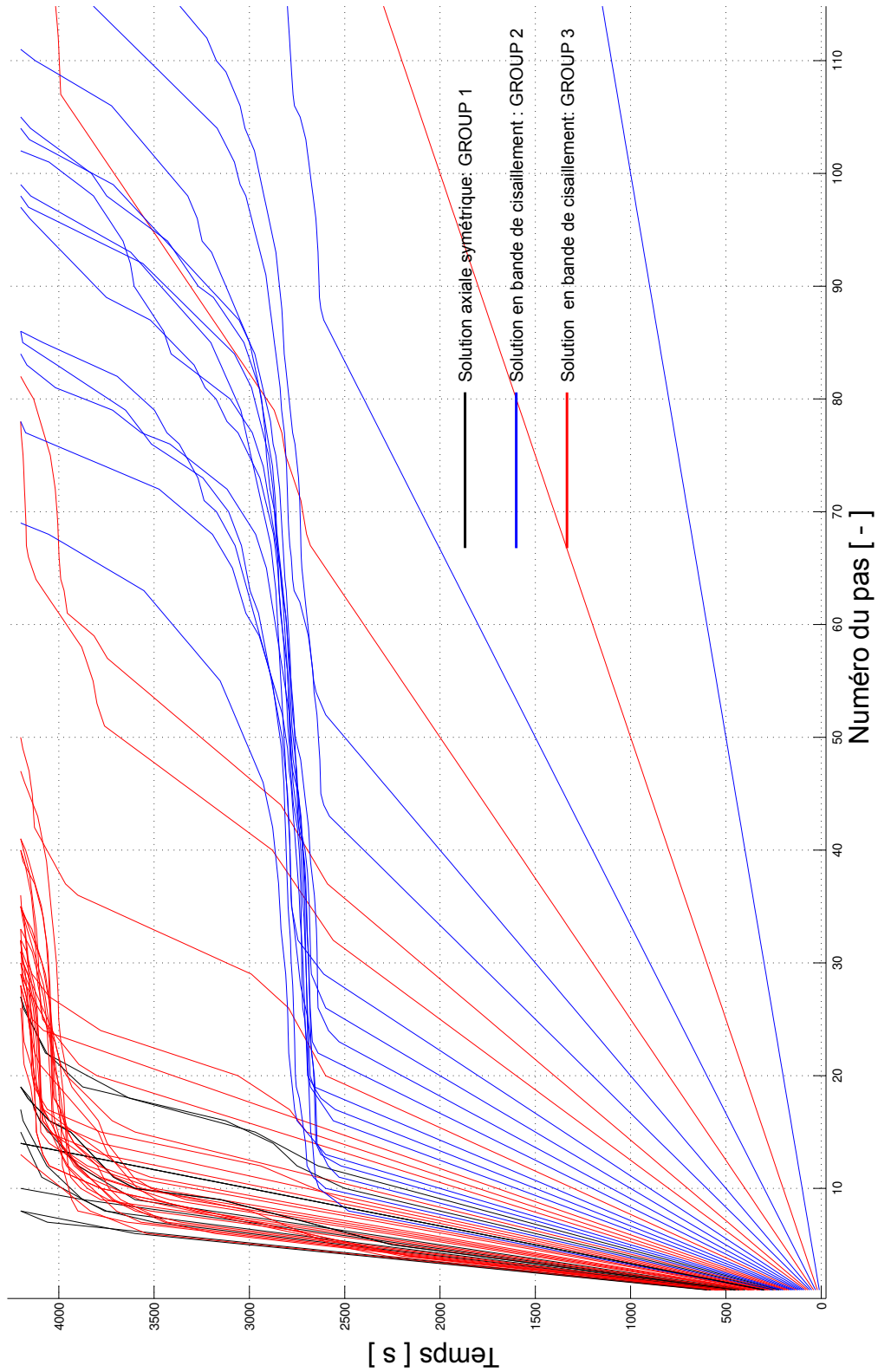


FIGURE 5.43 – Discrétisation temporelle et type de solution avec $\Delta t_{max} = \Delta t_o$

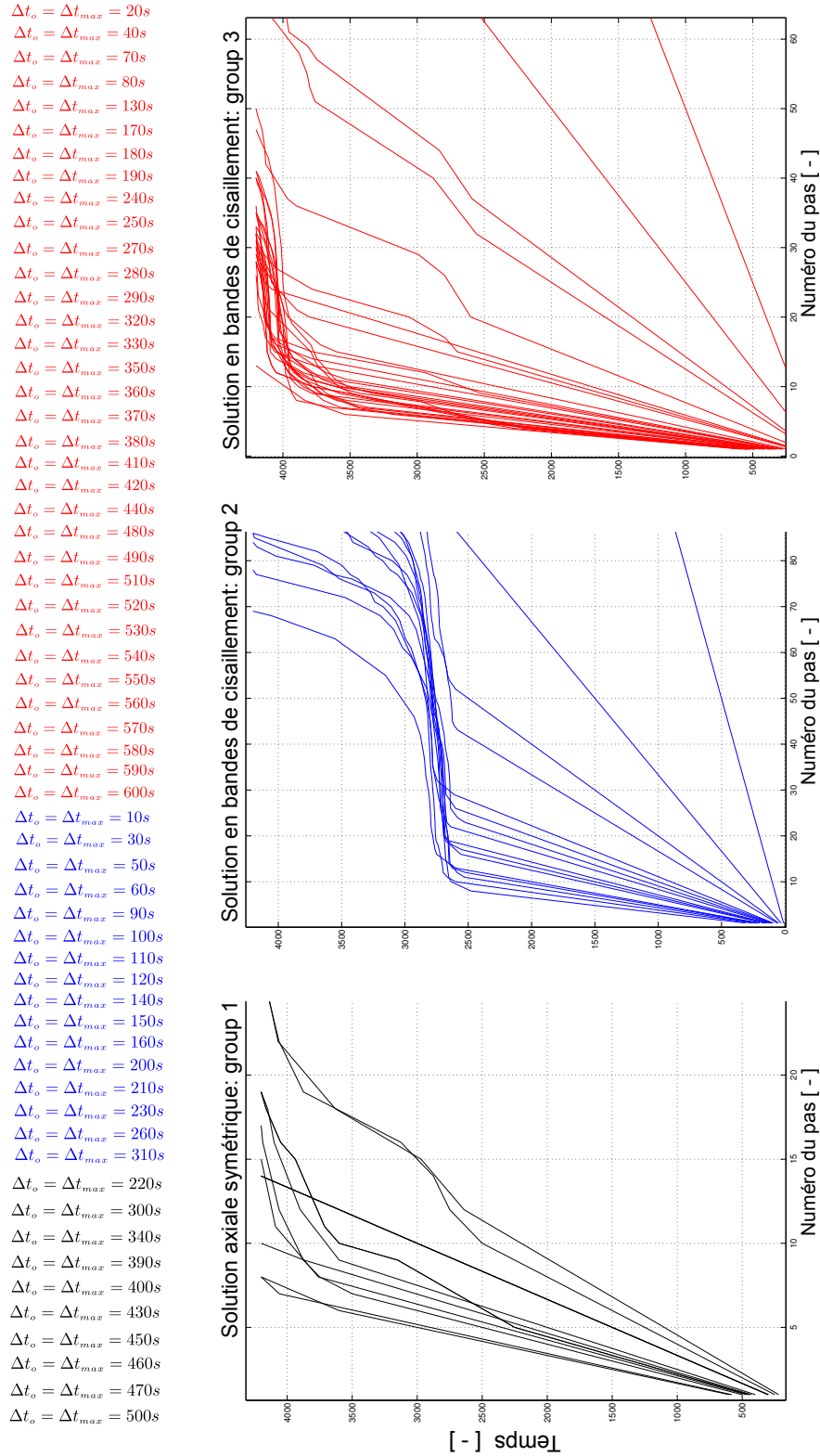


FIGURE 5.44 – Zoom de chaque type de solution trouvée et donnée de la discrétisation temporel.

5.7 Calcul avec une machine à 32 bit

Certains calculs ont été relancés en utilisant les mêmes données sur la gestion automatique de la discrétisation temporelle avec une machine à 32 bit alors que tous les calculs présentés d'abord ont été faits avec une machine à 64 bit.

Comme présenté dans ce chapitre, les lois de comportement envisagées présentent pour le même problème aux conditions aux limites plusieurs solutions. L'objectif de cette section est de prouver que la différence de précision due au changement de machine peut représenter une perturbation suffisante qui peut influencer de manière importante le calcul et conduire la solution numérique du problème à des chemins différents.

Les calculs ISO-1A, ISO-2A et ANISO-1A et ANISO-2A proposés dans la suite ont été choisis parce qu'ils appartiennent aux deux groupes de solutions en bandes de cisaillement : le groupe 2 (ISO-1A, ANISO-1A) et le groupe 3 (ISO-2A, ANISO-2A).

5.7.1 Loi de comportement Plasol

Calcul ISO-1A

La solution du calcul ISO-1A fait avec une machine à 32 bit est proposée en figure 5.45 où nous comparons les deux solutions.

Jusqu'au pas 49, la solution trouvée avec les deux machines est exactement la même, c'est-à-dire qu'elle suit le même parcours temporel en trouvant la solution avec le même numéro d'itération (figure 5.47 et figure 5.48). Jusqu'à ce pas, la distribution des points en charge plastique et en décharge élastique est égale dans les deux calculs faits avec deux machines différentes.

Après le pas 49, les deux calculs gèrent la taille du pas de temps de façon différente et les points en décharge élastique à l'intérieur de la zone plastifiée (figure 5.45) suivent une distribution différente. Même si les deux calculs traversent des pas de temps différents à la fin de la phase A, les deux problèmes présentent une solution localisée en bandes à spirales (même orientation, même nombre de bandes).

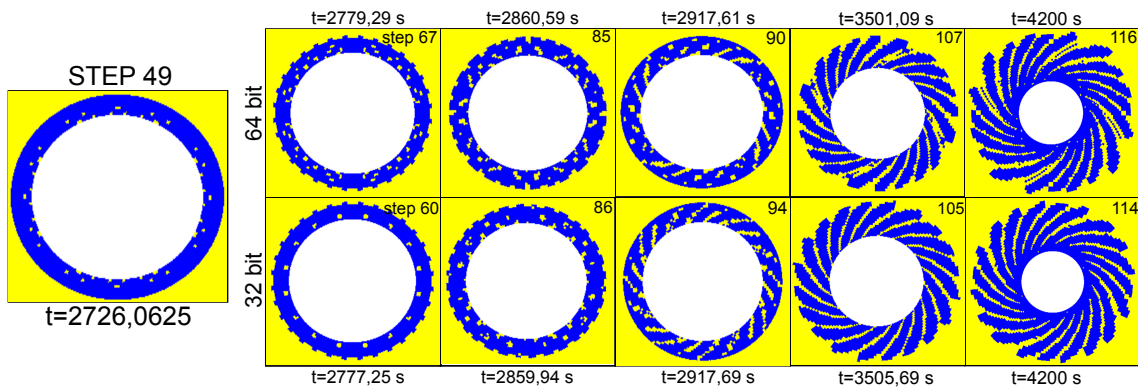


FIGURE 5.45 – Calcul ISO-1A avec deux différentes machines : 32 bit, 64 bit

Calcul ISO-2A

En utilisant les données pour la discrétisation temporelle du calcul ISO-2A le calcul avec une machine à 32bit montre un changement de chemin après le pas 22. Avant ce pas, le problème est résolu avec le même nombre d'itérations et avec la même taille de pas de temps (figure 5.47 et figure 5.48). La solution en terme de points en charge plastique et décharge élastique pour ce pas est montrée en figure 5.46.

Après le pas 22 les deux calculs montrent un changement de parcours. Le calcul lancé sur la machine à 32 bit présente une décharge des points de Gauss qui pourrait amener à la formation des bandes conjuguées (pas 27 et 28) comme le calcul lancé sur la machine à 64 bit. Pourtant dans le pas 29, les points de Gauss en décharge se disposent de façon à former des bandes à spirales.

Qualitativement cette solution est la même que celle montrée dans le calcul ISO-3A mais les bandes de cisaillement présentent une décharge moins importante et un sens contraire par rapport à celle du cas ISO-3A précédemment montré.

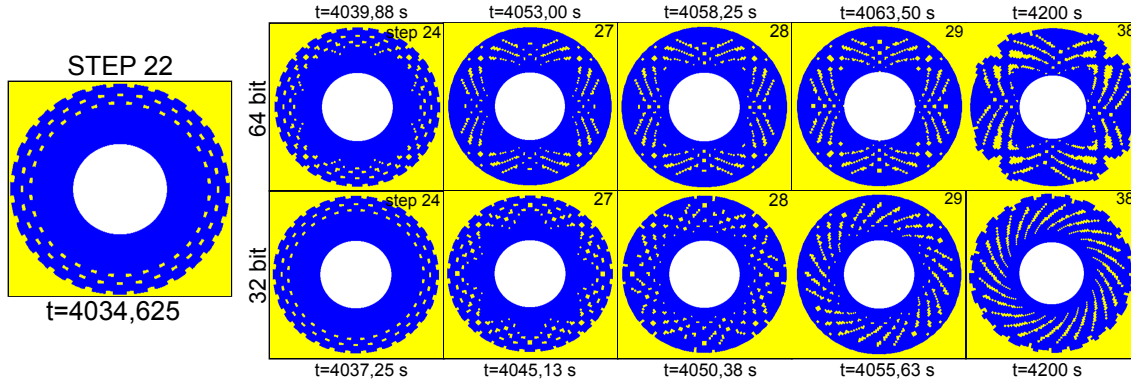


FIGURE 5.46 – Calcul ISO-2A avec deux machines différentes : 32 bit, 64 bit

5.7.2 Loi de comportement Plasol anisotrope

Calcul ANISO-1A

Les considérations faites pour les calculs avec le modèle Plasol sont aussi valable pour le même problème avec la loi de comportement Plasol anisotrope, notamment pour ce calcul ANISO-1A.

Dans ce calcul, même si après le pas 35 la discrétisation temporelle abordée est différente, le problème présent dans les deux cas des bandes de cisaillement conjuguées. La seule différence qui peut être remarquée concerne l'axe sur lequel les bandes qui tendent à se croiser est celui tourné vers l'autre sens.

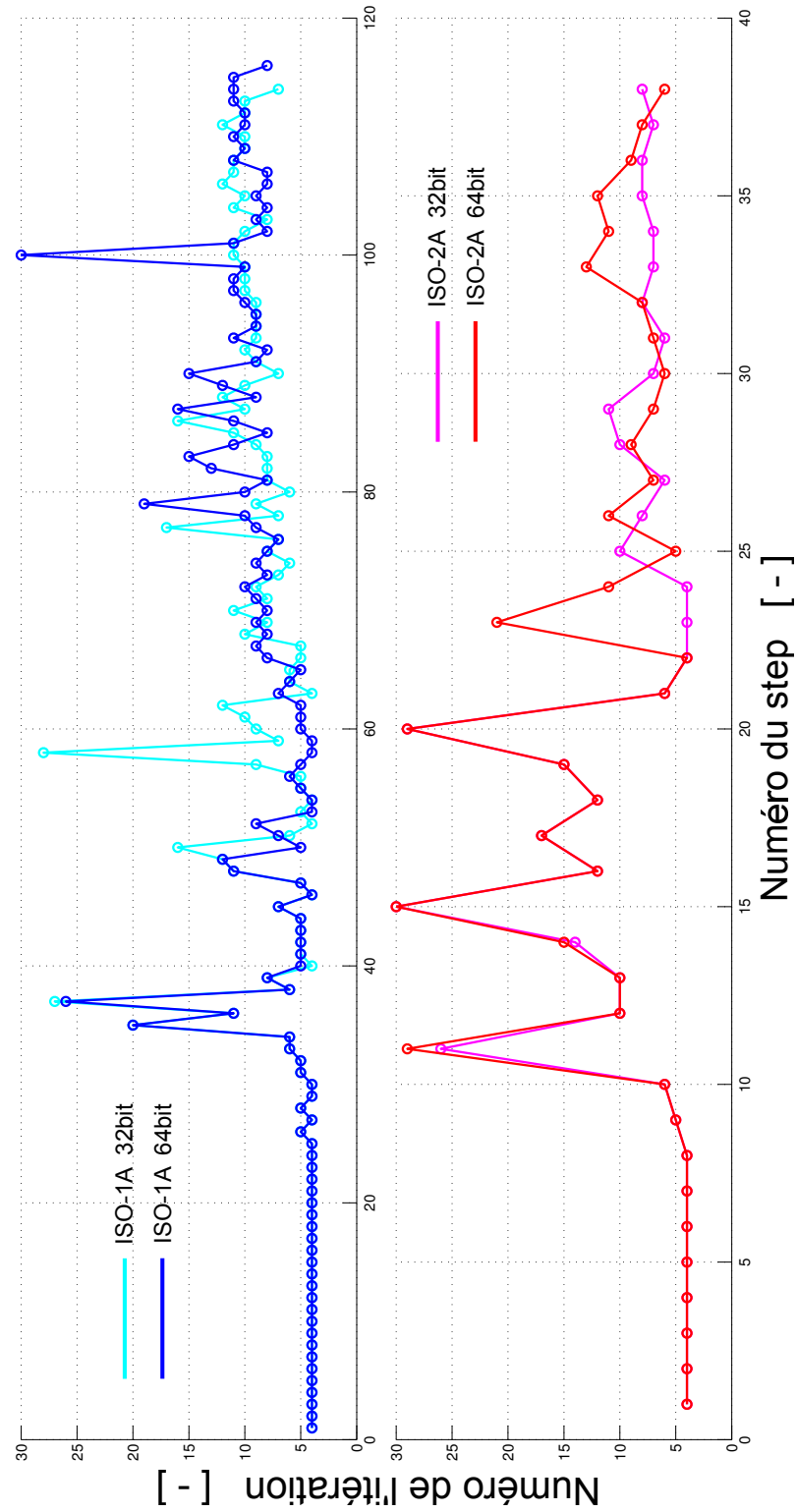


FIGURE 5.47 – Comparaison du numéro d'itérations pour le calcul ISO-1A et ISO-2A lancés sur une machine à 32 et 64 bit.

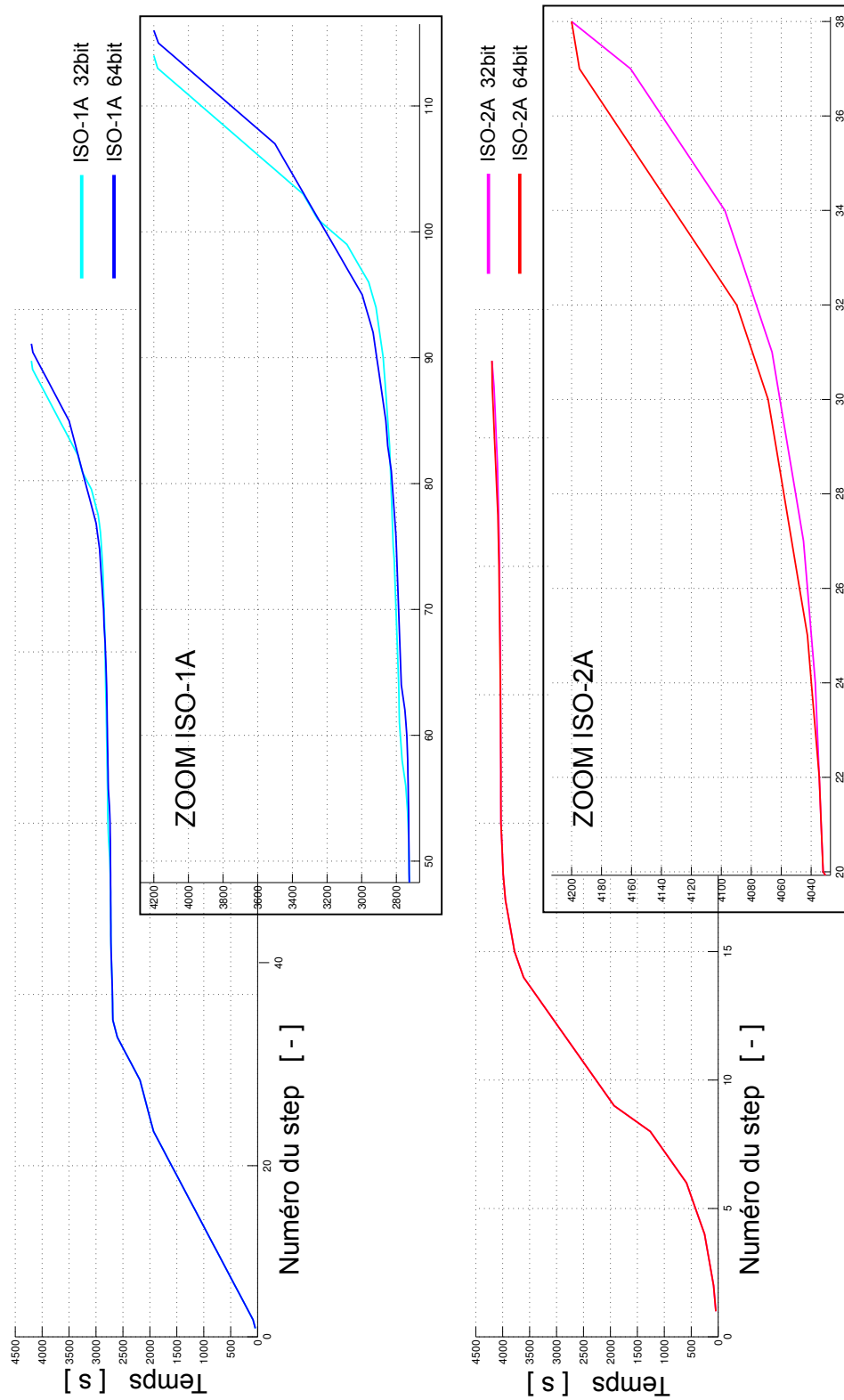


FIGURE 5.48 – Comparaison de la discrétisation temporelle pour le calcul ISO-1A et ISO-2A lancé sur une machine à 32 et 64 bit.

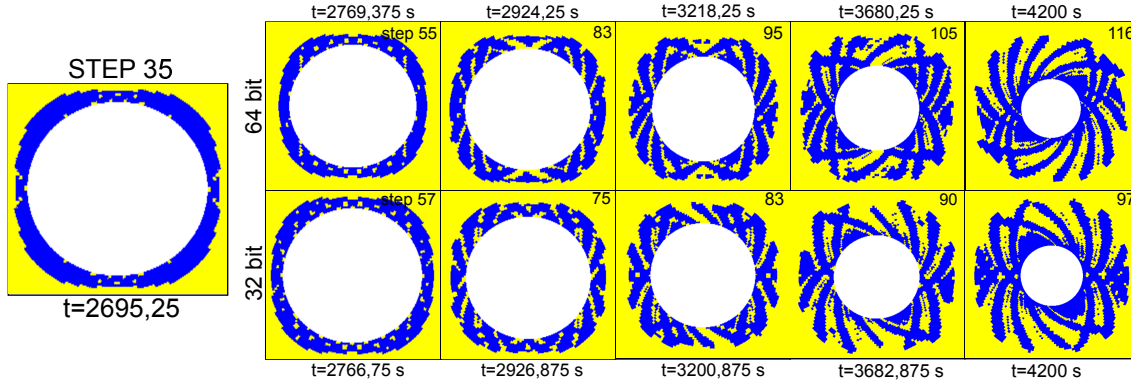


FIGURE 5.49 – Calcul ANISO-1A avec deux machines différentes : 32 bit, 64 bit

Calcul ANISO-2A

Le calcul ANISO-2A avec une machine à 32 bit présente des aspects différents par rapport aux calculs présentés précédemment.

Le premier pas de temps dans lequel une zone plastifiée va apparaître est le pas 10 et même à partir de ce pas les deux solutions en terme de points plastifiés sont différentes comme montré en figure 5.51. Dans cette figure il est possible voir qu'à partir du pas 10 déjà les points en charge plastique sur le bord de la zone plastifiée ne sont pas exactement les mêmes. La solution continue à se différencier entre les pas 10 et 14 même si elle avance avec des pas de temps de la même taille.

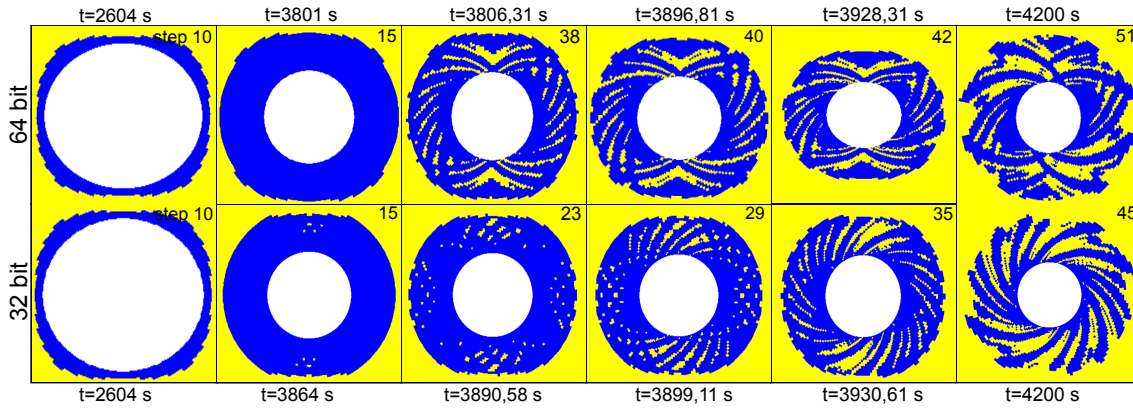


FIGURE 5.50 – Calcul ANISO-2B avec deux machines différentes : 32 bit, 64 bit

Le pas 15 est le premier pour lequel l'incrément de temps se différencie entre le calcul avec une machine à 32 bit et celui avec une machine à 64 bit (figure 5.53). Cette différenciation est due au fait que les deux calculs n'arrivent pas à atteindre la convergence avec le pas de temps du pas 14 ($\Delta t = 168s$) donc tous les deux commencent à le diviser par deux. Le calcul avec la machine à 64 bit nécessite de le diviser trois fois pour atteindre la convergence alors que le calcul avec la machine à 32 bit ne le nécessite qu'une fois pour atteindre la convergence.

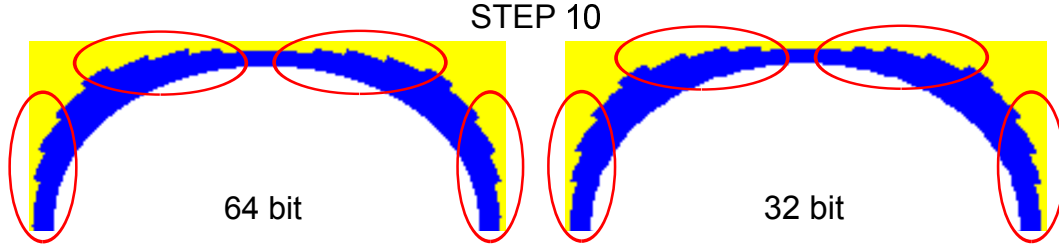


FIGURE 5.51 – Détail de la zone plastifiée au pas 10

À la fin de la phase de décharge, le calcul avec une machine à 32 bit montre une solution avec des bandes à spirales. Cette solution n'apparaissait jamais dans les calculs ANISO-1A, ANISO-2A, ANISO-3A et ANISO-4A, précédemment montrés.

5.8 Calcul sur un quart de cylindre creux

Dans les sections précédentes nous avons montré que en régime de post-localisation la solution du problème ne présente jamais une symétrie par rapport les axes horizontales et verticales. Toutefois nous avons aussi faits des calculs sur un quart de cylindre creux où cette symétrie est imposé par les conditions aux limites (figure 5.4).

L'objective est de montrer que même avec des conditions aux limites assez contraignantes, le problème continue à suivre les même parcours de localisation présentés dans les sections 5.3 et 5.4 c'est-à-dire celles du groupe 2 et du groupe 3. L'imposition de ces symétries donc ne porte pas la solution dans un chemin particulier mais nous retrouvons le même scénario des calculs pour le cylindre creux entier.

Plusieurs solutions ont été trouvées en utilisant des données différents pour la discrétisation temporelle du calcul (Δt_o , Δt_{max}). Nous en avons choisies trois pour le problème avec la loi de comportement Plasol (figure 5.54) et deux pour le problème avec la loi de comportement Plasol anisotrope 5.55 qui semblent être représentatives.

5.8.1 Loi de comportement Plasol

Il est possible d'observer que pour Plasol les solutions trouvées appartiennent au groupe 3 de la classification proposée en section 5.3. Les bandes de localisation se présentent sous forme à la fois des bandes conjuguées et à spirale. À cause des la loi de comportement les solutions à bandes à spirale montrent une parfait symétrie par rapport à l'axe à 45 degrés. Cette symétrie n'est pas respectée pour le cas de bandes à spirales. Un calcul pour la phase B du déchargement est aussi présenté. La solution semble similaire à ISO-4B du cylindre creux entier.

5.8.2 Loi de comportement Plasol anisotrope

Pour la loi Plasol anisotrope nous retrouvons des solutions qui appartiennent au group 2 et group 3 (figure 5.55). Les bandes de localisation sont de bande à spirales caractérisées par un sens de rotation contraire un par rapport l'autre. Nous proposons aussi la solution de la phase B où il est observable l'accumulation des déformations plastiques le long le plan du lissage.

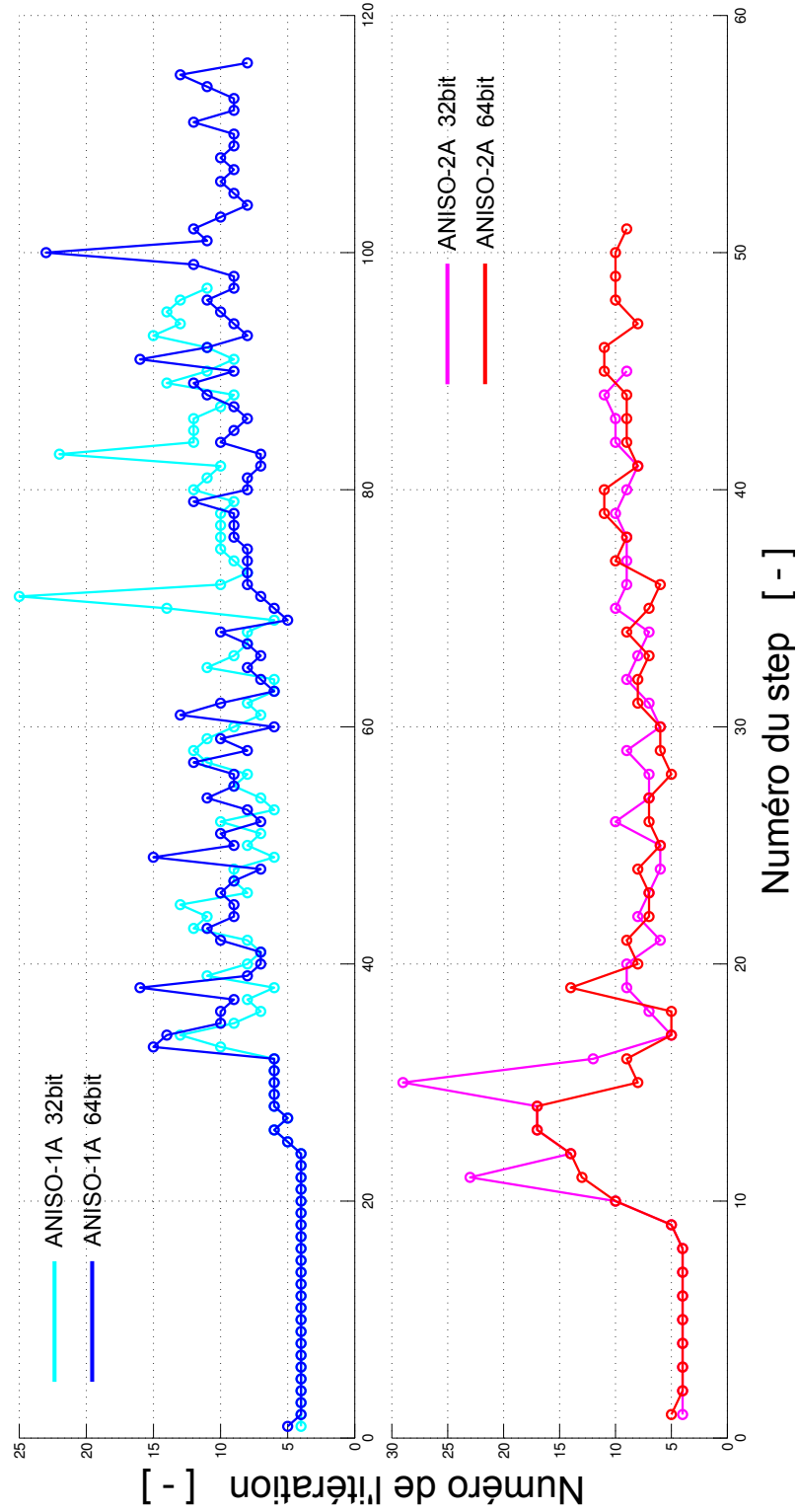


FIGURE 5.52 – Comparaison du nombre d'itérations pour les calculs ANISO-1A et ANISO-2A lancés sur une machine à 32 et 64 bit.

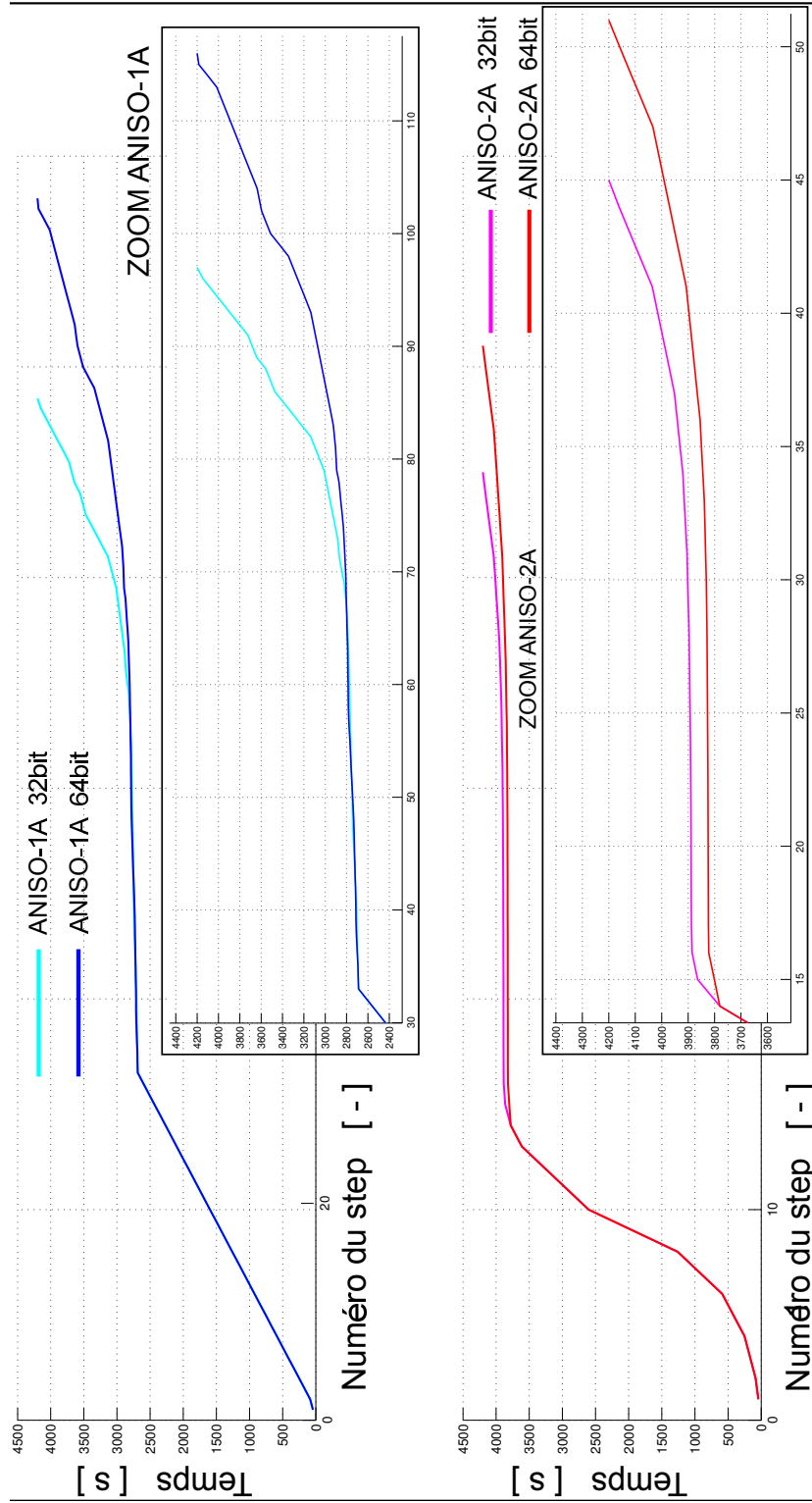


FIGURE 5.53 – Comparaison de la discrétisation temporelle pour les calculs ANISO-1A et ANISO-2A lancés sur une machine à 32 et 64 bit.

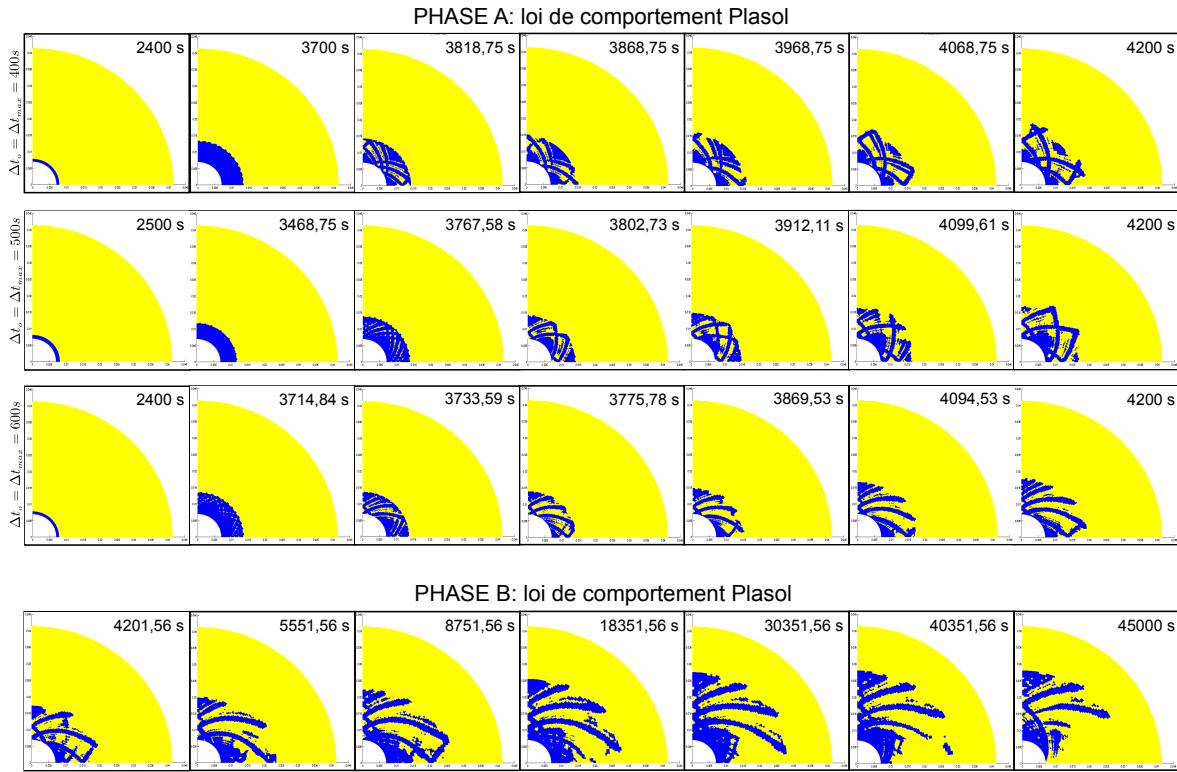


FIGURE 5.54 – Modélisation des essais de Lausanne sur un quart de cylindre creux : loi de comportement Plasol.

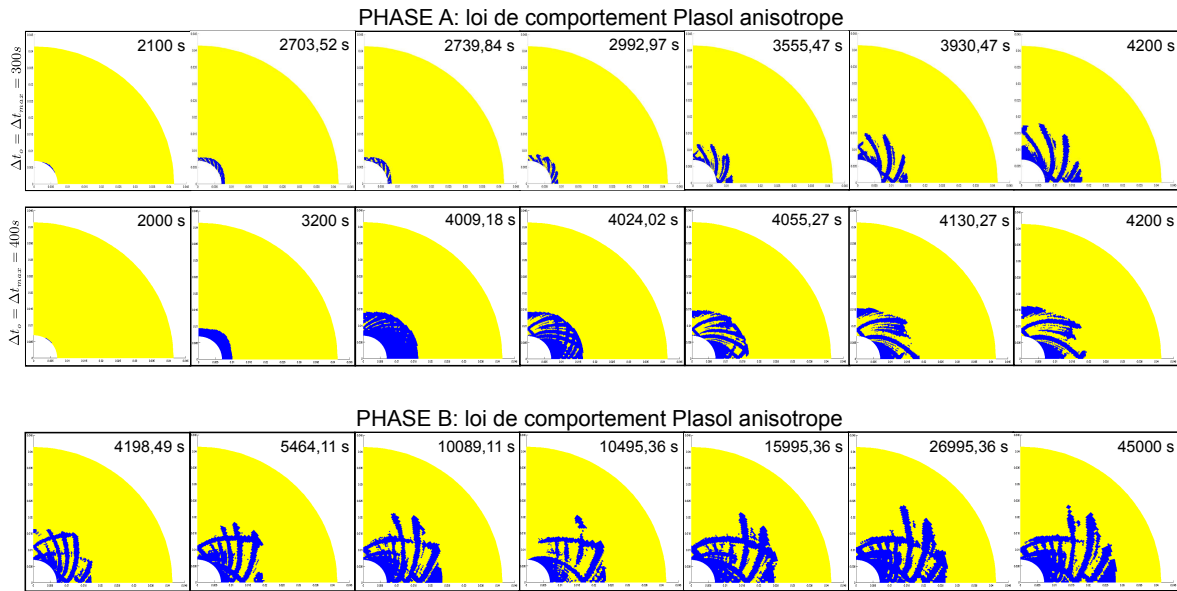


FIGURE 5.55 – Modélisation des essais de Lausanne sur un quart de cylindre creux : loi de comportement Plasol anisotrope.

5.9 Comparaison avec les résultats expérimentaux

En utilisant les résultats des essais expérimentaux réalisés à l'université de Lausanne EPFL, une comparaison purement qualitative avec les résultats du modèle Plasol anisotrope a été faite. Les essais pris en compte sont le 13B-BIS (dont le chargement est montré en figure 5.2) et le 14-BIS, les deux présentés dans [90]. L'essai 14-BIS est caractérisée par le même décharge en contrainte que l'essai 13B-BIS mais avec une décharge de la pression d'eau jusqu'à $p_w = 0.1$ MPa. En comparant les résultats numériques avec celles expérimentaux, trois considérations peuvent être faites :

- Le deuxième invariant de la déformation de l'essai 14-BIS à la fin de la phase B est caractérisé par une distribution à ovale autour du forage (figure 5.57.a). Si nous considérons la distribution de la déformation plastique équivalente ε_{eq}^p nous voyons que cette tendance est bien modélisée par la loi de comportement Plasol anisotrope (figure 5.56). En effet, même si les bandes de cisaillement sont différentes chacune des quatre solutions montre cette distribution des déformations plastiques.

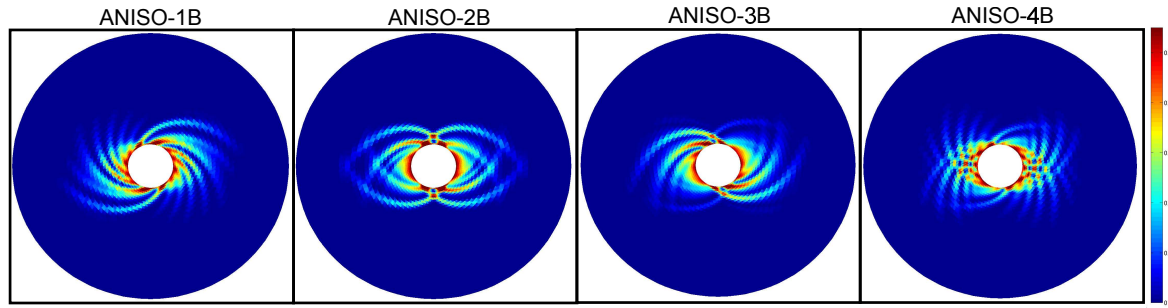


FIGURE 5.56 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p à la fin de la phase B

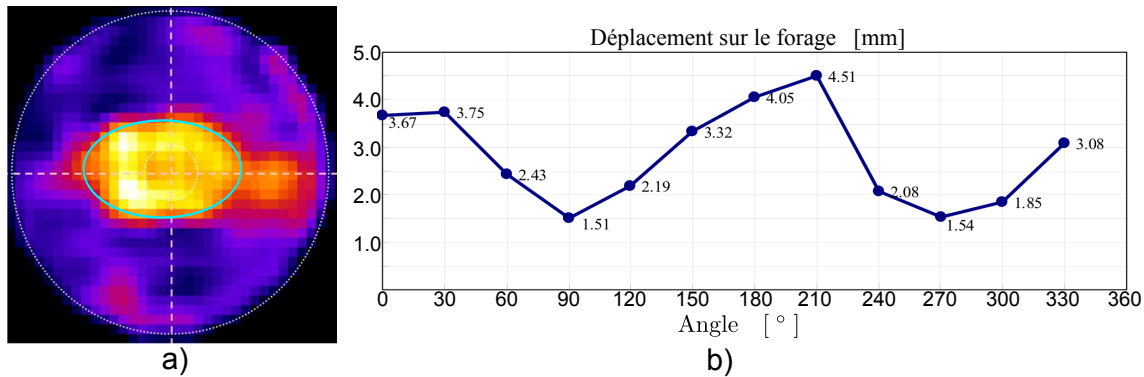


FIGURE 5.57 – a) Deuxième invariant de la déformation II_ε : essai 14_{bis}. b) Déplacement sur le forage : essai 14_{bis}, [91].

- Puisque les déformations plastiques tendent à s'accumuler sur l'axe le plus rigide

(axe horizontal) l'intérieur du forage présente une forme allongée vers l'axe vertical (figure 5.58) avec des irrégularités. Cet aspect est modélisé par la loi de comportement Plasol anisotrope de façon qualitative (figure 5.59). Dans les calculs numériques les irrégularités sur le bord intérieur du cylindre creux sont causées par le developpement des bandes de cisaillement autour du forage.

- Les déplacements du forage calculés avec la corrélation d'image atteignent un ordre de grandeur de 3-4 mm alors qu'avec l'analyse numérique on arrive à 1-1,5 mm. Ce résultat montre que une amélioration du modèle devrait être pris en compte, par exemple en introduisant dans la fonction de charge f un ultérieur dépendance des directions de structure qui caractérisent l'anisotropie du matériau.

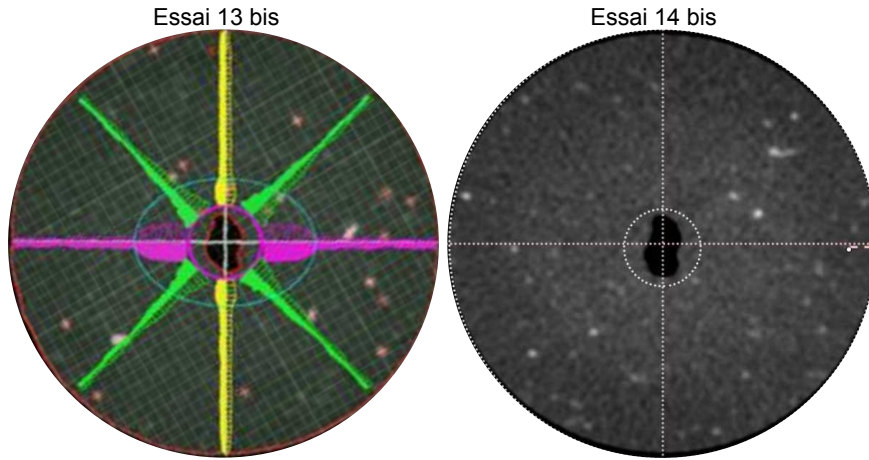


FIGURE 5.58 – Déformée du forage pour les essais 13_{bis} et 14_{bis} (Images prises par [91]).

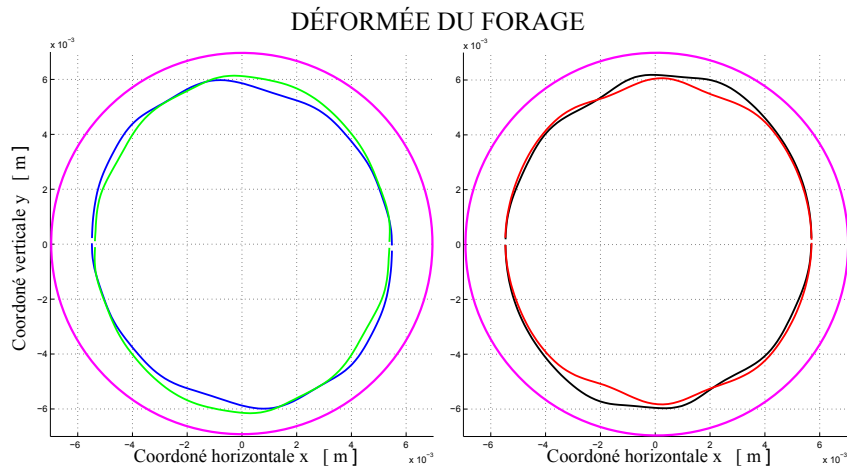


FIGURE 5.59 – Déformée du forage pour les calculs ANISO-1, ANISO-4 (image de gauche) et ANISO-2, ANISO-3 (image de droite). En rose la forme du forage dans la configuration non-déformée.

5.10 Conclusion

Dans ce chapitre, deux lois de comportement ont été envisagées pour modéliser les travaux expérimentaux sur un cylindre creux réalisés par l'École Polytechnique de Lausanne. Cette campagne expérimentale a eu pour objectif l'étude de la zone endommagée autour d'un forage (EDZ) à une échelle de laboratoire.

Dans le cadre de l'élasto-plasticité en petites déformations, nous utilisons les lois de comportement décrites dans le chapitre 4 (Plasol et Plasol anisotrope) pour modéliser les essais sur un cylindre creux. Ces lois de comportement se basent sur un critère de Drucker-Prager avec un mécanisme adoucissant sur la cohésion. Elles se différencient par la modélisation de la réponse élastique du milieu pour laquelle nous avons choisi à la fois l'élasticité linéaire isotrope (Plasol) et l'élasticité linéaire transversale (Plasol anisotrope).

Le problème d'unicité est étudié pour ce problème aux conditions aux limites avec ces deux lois de comportement. Étant donné qu'il n'est pas toujours possible de prouver théoriquement l'unicité de la solution, nous montrons que le même problème numérique, celui du cylindre creux, peut être résolu avec des solutions différentes. Pour cela nous changeons l'initialisation de l'algorithme de Newton-Raphson à travers le changement des paramètres (Δt_o et Δt_{max}) pour la discrétisation temporelle du problème numérique. De cette façon deux ou trois types de solutions peuvent être trouvés en fonction des paramètres Δt_o et Δt_{max} :

1. Groupe 1 : solutions axiales-symétriques (Plasol) et solution symétrique par rapport aux axes vertical et horizontal (Plasol anisotrope).
2. Solutions avec déformations localisées en bandes de cisaillement
 - (a) Groupe 2 : Formation des bandes de cisaillement de l'intérieur du cylindre creux.
 - (b) Groupe 3 : Formation des bandes de cisaillement à partir de la décharge d'une zone plastifiée.

Même si les bandes de cisaillement se déclenchent toujours avec la décharge élastique de certains points, le mécanisme de formation et de propagation entre les solutions du groupe 2 et les solutions du groupe 3 sont différentes et ont donc été considérées pour classer les solutions trouvées. Selon les paramètres Δt_o et Δt_{max} nous avons montré qu'il est possible de conduire le calcul à une des ces trois solutions pour le cas de la loi de comportement Plasol.

Les solutions trouvées montrent des zones à déformation localisée sous la forme de bandes à spirales et de bandes à conjugués. En utilisant la loi Plasol la configuration à bandes à spirales est celle qui apparaît le plus souvent. En utilisant la loi Plasol nous observons dans la plus part des calculs des bandes conjuguées.

Généralement, d'un point de vue expérimentale les essais de laboratoire sont suffisamment reproductibles si la déformation globale de l'échantillon peut être considérée de façon approximative comme homogène. Au contraire, à partir de l'apparition des déformations localisées (état de déformation hétérogène) la présence des imperfections à l'échelle microscopique joue un rôle fondamental dans la réponse du matériau. De cette façon la reproductibilité d'un essai en laboratoire est complètement perdue à cause des hétérogénéités à l'échelle microscopique.

D'un point de vue numérique la non-unicité d'un problème aux conditions aux limites peut être interprétée comme un aspect théorique et numérique qui permet de modéliser la perte de reproductibilité d'un essai de laboratoire. Si au niveau expérimental les défauts du matériau à l'échelle microscopique sont déterminants pour le déclenchement d'un phénomène de localisation, au niveau numérique n'importe quelle changement (initialisation de l'algorithme de Newton-Raphson, changement de données numériques, précision de la machine utilisée...) peut être suffisante pour atteindre une des possible solutions du problème étudié.

Le choix d'utiliser Plasol anisotrope pour la modélisation numérique des essais sur un cylindre creux est justifiée par le comportement anisotrope de l'argile de Boom. Cette façon d'introduire l'anisotropie dans une loi constitutive élasto-plastique semble donner des résultats qualitativement acceptables par rapport aux résultats expérimentaux, en gardant en même temps une formulation analytique (l'élasticité transversale) simple et claire. Cette approche est aussi suggérée par la campagne expérimentale de Pyriatikul [117] sur Boom Clay.

À cause d'une définition trop basse des scansions réalisées par le laboratoire de Lausanne (EPFL), il n'a été pas possible d'identifier des éventuelles bandes de localisation dans les échantillons de l'argile de Boom et donc il n'a été pas possible de les comparer avec les bandes de cisaillement obtenues avec la modélisation numérique. De toute façon il semble intéressante observer que les irrégularité du contour du forage et sa forme ovalisée sont deux aspects que nous retrouvons dans les résultats numériques de façon qualitative. La région autour du forage où les déformations plastiques sont plus importantes est aussi bien décrite par la loi de comportement Plasol anisotrope.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées afin d'améliorer le modèle Plasol anisotrope.

- Couplage entre la valeur de la perméabilité et les déformations plastiques. De cette façon il est possible de décrire une augmentation de la perméabilité en fonction de l'endommagement du matériau.
- Utilisation des contraintes effectives de Biot au lieu des contraintes effectives de Terzaghi.
- Modélisation du comportement élastoplastique introduisant l'anisotropie aussi

dans la fonction de charge f .

- Formulation d'une loi de comportement élastoplastique anisotrope en grandes déformations afin d'obtenir un modèle complètement consistante dans un point de vue thermodynamique.

Les améliorations du modèle écrites ci-dessus représentent des perspectives à long terme. D'un point de vue à la fois théorique et numérique il est possible de les mettre en place pour obtenir des résultats d'un problème aux limites. D'un point de vue expérimentale il est encore très difficile arriver à des résultats significatifs qui peuvent être considérés représentatifs en terme de réponse mécanique et de calcul des paramètres sur l'argile de Boom. Il n'est donc pas logique envisager un modèle très complexe pour lequel il existe une forte incertitude sur les paramètres hydromécaniques mesurés expérimentalement. Pour cette raisons de simplicité nous avons utilisé la loi de comportement élastoplastique Plasol anisotrope pour la modélisation numérique des essais sur un cylindre creux.

Quatrième partie

Homogénéisation numérique : Les éléments finis au carré FEM²

Chapitre 6

La méthode de l'homogénéisation

6.1 Introduction

Le comportement macroscopique d'un matériau peut être expliqué de façon générale à partir de sa caractérisation microstructurale, ce qui nécessite la prise en compte des hétérogénéités. Comme remarqué dans la section 2.3.1, l'analyse des hétérogénéités est strictement liée à l'échelle d'observation à laquelle nous étudions le matériau. Les géomatériaux sont en ce sens caractérisés par plusieurs échelles d'observation dont le choix dépend du phénomène à étudier et change selon le matériau.

Étant donné qu'il est impossible de concevoir un modèle qui considère toutes les hétérogénéités, nous décrivons le comportement du matériau à partir d'un volume comprenant un grand nombre d'hétérogénéités (Volume Élémentaire Représentatif, VER). Il est ainsi possible d'imaginer un milieu continu équivalent qui se comporte, au niveau macroscopique, comme le matériau hétérogène. La description du milieu continu équivalent peut donc être obtenue soit à l'aide d'une étude phénoménologique ou expérimentale, directement à l'échelle macroscopique, soit par une technique d'homogénéisation de la microstructure du matériau à l'échelle microscopique.

Pour caractériser la microstructure du matériau à une échelle donnée, nous remarquons que les mesures de champ brièvement présentées dans la partie I peuvent représenter un outil important.

Il est nécessaire qu'un grand nombre d'hétérogénéités soit présent dans le Volume Élémentaire pour qu'il soit représentatif du matériau. Cette condition implique que la dimension caractéristique des hétérogénéités l doit être inférieure à la dimension du volume de matériau étudié H (équation 6.1).

$$\varepsilon = \frac{l}{H} \ll 1 \quad (6.1)$$

En envisageant que la condition de séparabilité des échelles (équation 6.1) soit bien satisfaite, plusieurs échelles d'observations peuvent être envisagées pour les géomatériaux

(section 2.3.1). Dans ce cadre, le comportement du milieu utilisé dans la modélisation peut être décrit à l'aide d'un processus d'homogénéisation.

La condition de séparabilité des échelles peut être utilisée afin de classer les milieux du type de ceux à échelles d'observation séparées et de ceux à échelles d'observation non-séparées (Auriault [4]).

6.1.1 Techniques d'homogénéisation

En considérant des milieux à échelles séparées, une deuxième classification peut être faite à partir de la structure qui les caractérise à l'échelle microscopique. Il est donc possible de parler de milieux à structure périodique et de milieux à structure aléatoire (Auriault [7]). Selon le cas, plusieurs techniques d'homogénéisation différentes ont été développées au cours des années.

Les milieux à structure périodique sont caractérisés par une invariance par translation, c'est-à-dire qu'une translation de la cellule élémentaire ne change pas la structure du milieu car elle se dispose de façon périodique (figure 6.1). Pour ces milieux, la méthode d'homogénéisation à l'aide des développements asymptotiques a été formulée par Bensoussan [17], Sanchez-Palencia [125] et Auriault [8], [3]. Cette méthode sera présentée de façon synthétique dans la section 6.2.1.

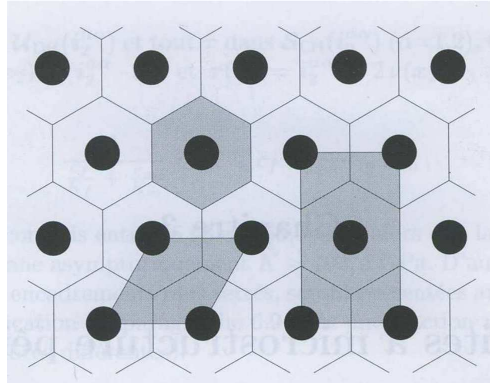


FIGURE 6.1 – Microstructure d'un milieu périodique, [41].

Pour les milieux à structure aléatoire nous citons la méthode d'homogénéisation statistique (Kroner [89]) et les méthodes auto-cohérentes (Hill [80], Hashin [76] et Zaoui [156]). La modélisation statistique permet de calculer les limites supérieures et inférieures des coefficients homogénéisés de la loi de comportement. Plus la description locale du milieu à structure aléatoire est détaillée, plus ces bornes se rapprochent. Les méthodes auto-cohérentes se basent sur l'hypothèse que le comportement de chaque composante de la microstructure n'est pas influencé par les composantes qui les entourent. Il est possible de considérer comme REV une hétérogénéité dans un milieu continu infini.

6.2 Homogénéisation pour les milieux à structure périodique

6.2.1 La méthode des développements asymptotiques

La méthode des développements asymptotiques est fondée sur l'hypothèse que les échelles d'observation du matériau peuvent être considérées séparables. Il est donc possible de considérer comme satisfaite l'équation 6.1. La méthode des développements asymptotiques s'applique aux milieux pour lesquelles la microstructure se répète périodiquement (figure 6.1). De cette façon, la cellule représentante la microstructure sera le VER du milieu.

En vertu de la séparabilité des échelles d'observation, nous considérons deux variables d'espace sans dimension, y_i et x_i , les deux étant définies à l'aide d'une variable d'espace physique X_i .

$$y_i = \frac{X_i}{l} \qquad x_i = \frac{X_i}{H}$$

La variable y_i exprime les interactions à courte distance, alors que la variable x_i exprime les interactions à longue distance (Auriault [4]). Une grandeur physique quelconque du problème peut ainsi être décrite avec une fonction f dépendante des variables y_i et x_i .

$$f = f(x_i, y_i) \quad \text{avec } x_i = \varepsilon y_i$$

qui représente le point de vue à l'échelle microscopique,

$$f = f(x_i, y_i) \quad \text{avec } y_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$$

qui représente le point de vue à l'échelle macroscopique.

Il est maintenant possible d'introduire l'hypothèse de périodicité aussi dans la description de la fonction f en utilisant la technique des développements asymptotiques à échelles multiples (Bensoussan [17], Sanchez-Palencia [125]). Il s'agit d'écrire cette fonction comme un développement de fonctions définies périodiques au sens mathématique sur la cellule unitaire où chacune est proportionnelle à une puissance du paramètre ε (équation 6.2).

$$f(x_i, y_i) = \varepsilon^0 f^{(0)}(x_i, y_i) + \varepsilon^1 f^{(1)}(x_i, y_i) + \varepsilon^2 f^{(2)}(x_i, y_i) \dots \quad (6.2)$$

Il est donc possible de montrer que pour $\varepsilon \rightarrow 0$ la fonction $f^{(0)}$ représente le comportement du milieu à l'échelle macroscopique de la grandeur physique étant donnée qu'elle ne dépend pas de y_i . Pour un problème de mécanique, par exemple, la fonction $f^{(0)}(x_i)$ représente le champ de déplacement du milieu homogénéisé (figure 6.2). Pour des problèmes linéaires, l'application de cette méthode peut amener à une expression analytique de la loi de comportement macroscopique. Autrement, si les problèmes sont fortement non-linéaires, il est nécessaire de faire des calculs numériques (voir Dobrovat

[55], Gemelli [70]).

Dans tous les cas, les résultats théoriques permettent de justifier la physique à l'échelle macroscopique du problème traité, en partant des hypothèses faites sur la cellule élémentaire à l'échelle microscopique (Auriault [5], [6]).

L'avantage de cette méthode par rapport aux autres se trouve dans la rigueur mathématique avec laquelle il est possible de formuler les équations pour le milieu continu équivalent. Une de ses limites est qu'elle ne peut pas traiter des géométries de la microstructure excessivement complexes. Cette limite peut être dépassée grâce à une approche numérique.

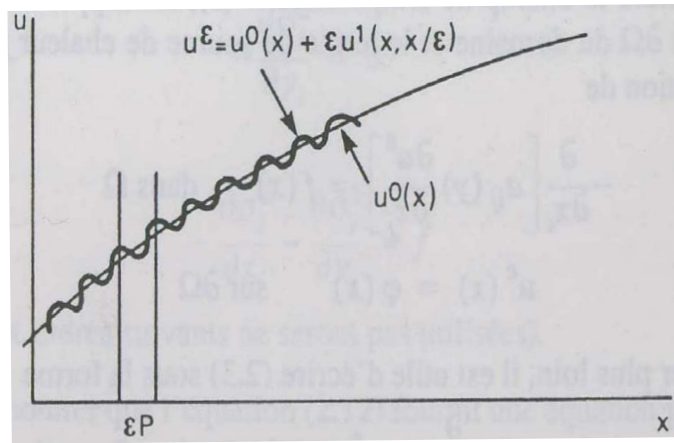


FIGURE 6.2 – Exemple d'une fonction u périodique par rapport à y , [41].

6.2.2 Les méthodes numériques

Nous présentons une façon purement numérique de construire une loi de comportement avec un processus d'homogénéisation. En utilisant les hypothèses de périodicité pour le problème à l'échelle microscopique, la loi de comportement est déduite en démarrant un calcul numérique sur la cellule unitaire représentant le VER du matériau. Ce calcul numérique peut être fait avec une méthode aux éléments discrets (DEM) ou avec une méthode aux éléments finis (FEM).

Dans le cadre d'un problème aux limites résolu aux éléments finis, l'implémentation de cette méthode d'homogénéisation peut être expliquée en envisageant que chaque fois qu'il est nécessaire de calculer la contrainte au niveau des points de Gauss pour un pas donné, nous démarrons un calcul sur la cellule unitaire. La cinématique macroscopique est utilisée pour imposer des conditions aux limites sur la microstructure périodique. Si le problème à l'échelle microscopique est résolu avec les éléments discrets, on parlera de passage micro-macro DEM-FEM ; si le problème à l'échelle microscopique est traité avec les éléments finis, on parlera de passage micro-macro FEM-FEM (ou éléments finis au carré, FEM²), comme montré dans la figure 6.3.

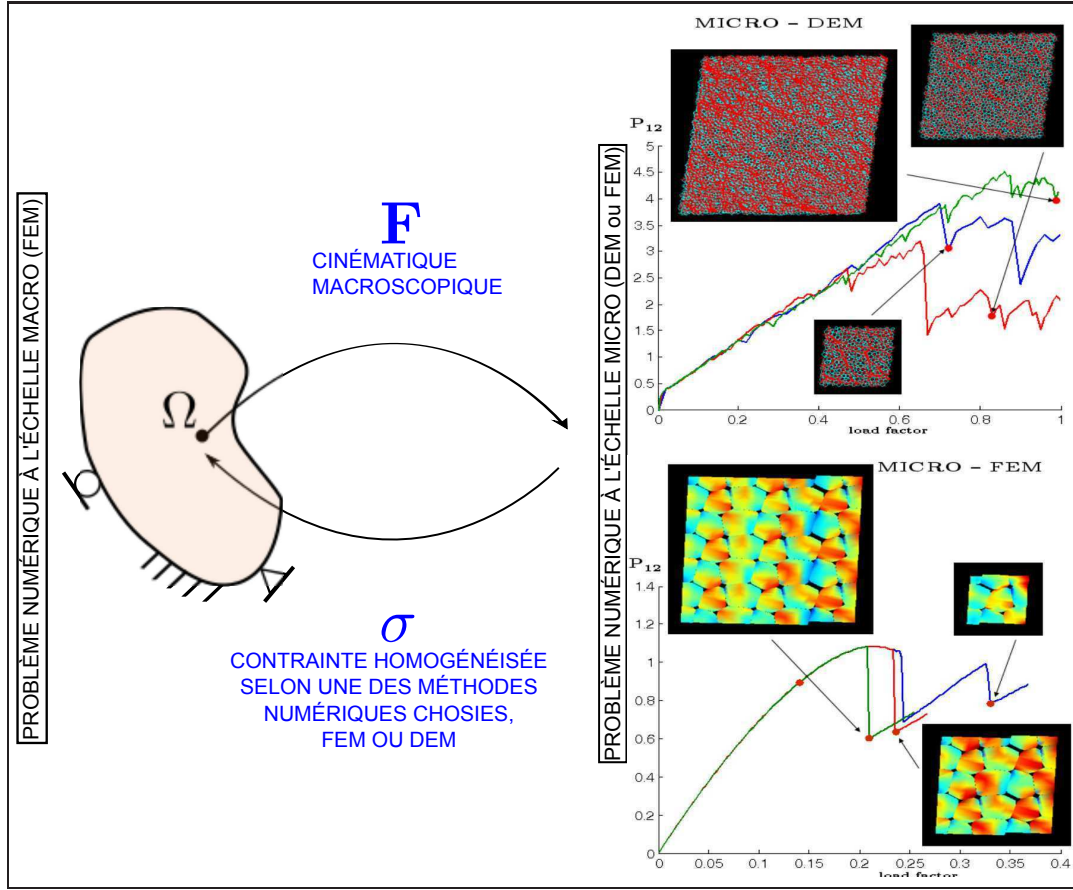


FIGURE 6.3 – Passage micro-macro à l'aide d'une technique d'homogénéisation numérique, FEM-DEM ou FEM-FEM.

Les modèles de passage micro-macro DEM-FEM semblent bien décrire certains phénomènes des matériaux granulaires. Borja et Wren [24], [155] ont étudié la réponse du point matériel soumis à un chargement donné (en contrainte ou en déplacement) au niveau macroscopique en considérant un milieu granulaire modélisé avec les éléments discrets. Dans ce cadre, les travaux de Nitka et al. [111] et Nguyen [110] ont réalisé le couplage DEM-FEM, afin de décrire le comportement du milieu homogénéisé pour des problèmes aux limites simples (essai oedométrique, de cisaillement et biaxial). Nous citons aussi les travaux de Meier et al. [100],[99] et de Miehe [102].

Dans le cadre de la méthode des éléments finis au carré, nous citons les travaux de Miehe et al. [103] qui proposent un modèle pour décrire le comportement plastique de métaux à structure cristalline. Feyel et Chaboche [65] utilisent cette méthode sous l'hypothèse de milieu périodique pour modéliser des matériaux composites en SiC/Ti dans le cadre des applications aéronautiques. Ils caractérisent la cellule avec un modèle élastoviscoplastique. En 2003, Feyel [64] propose aussi cette méthode envisageant un milieu enrichi de type Cosserat à l'échelle macroscopique et un milieu classique à l'échelle mi-

croscopique. Kouznetsova et al. [87], [88] obtiennent des résultats macroscopiques en mécanique pure en appliquant à la frontière de la microstructure des conditions aux limites périodiques à partir du tenseur de transformation F_{ij} et aussi de son gradient. Ils constatent que la réponse macroscopique dépend de la taille de la cellule, ce qui n'est pas le cas pour des calculs où on envisage qu'une cinématique premier gradient F_{ij} .

Bilbie et al. [21] proposent une étude de bifurcation au niveau du point matériel à l'échelle macroscopique. La microstructure qu'ils considèrent est faite par des grains élastiques connectés par des interfaces cohésives modélisées avec le modèle de Tvergaard [142]. Ils réalisent deux types de calculs avec le même chargement, dans le premier (figure 6.4.a) ils considèrent pour la loi des interfaces un valeur du coefficient de frottement $\mu_f \neq 0$ pour le deuxième (figure 6.4.b) $\mu_f = 0$.

Dans ce dernier cas ils montrent que, en refaisant le calcul sur plusieurs cellules l'hypothèse de périodicité est toujours respectée et la microstructure peut être considérée comme représentative. Au contraire en refaisant les mêmes calculs avec un frottement non-nul à partir d'un certain moment dans lequel les interfaces sont endommagées, la rupture n'arrive plus de façon périodique. Cela signifie que, dans ce cas, la microstructure ne peut plus être considérée comme représentative de la réponse macroscopique du milieu continu équivalente. De plus cette perte d'unicité arrive de plus en plus tôt en augmentant le nombre de cellules unitaires.

Les éléments finis aux carré en hydromécanique

Dans le chapitre 7 nous présentons un modèle couplé sur le VER. Ce modèle a été développé par Frey dans [68] et [69] où il montre une étude au niveau du point matériel à l'échelle macroscopique. La microstructure considérée par Frey est composée par des grains imperméables et élastiques, qui sont connectés avec des interfaces cohésives qui s'endommagent au cours du chargement, afin qu'elles représentent la zone de faiblesse de la cellule. Le domaine des interfaces identifie un réseau de canaux à l'intérieur duquel l'eau peut couler en appliquant des forces tangentielles (forces visqueuses) et des forces normales (pression d'eau) sur les grains en fonction de l'ouverture des interfaces.

Il est donc clair que le comportement des interfaces cohésives joue un rôle fondamental dans la description du milieu homogénéisé. Nous parlons d'une loi d'interface en tant que relation entre les déplacements relatifs et les forces cohésives entre les lèvres d'une fissure (figure 6.5). Ces lois ont pour objectif de modéliser la zone adjacente à une fissure caractérisée par des phénomènes de micro-fissuration précédentes à la propagation de la fissure (zone cohésive).

Au début des années soixantes, Barenblatt [11], [12] et Dugdale [57] ont été les premiers à supposer l'existence de cette zone cohésive dans la mesure où les contraintes prédites par les modèles élastiques tendent vers l'infini au bord de la fissure. Hillerborg en 1976 [82] propose le concept d'énergie de fracture en introduisant une loi de force cohésive entre la traction et les déplacements relatifs (saut en déplacement).

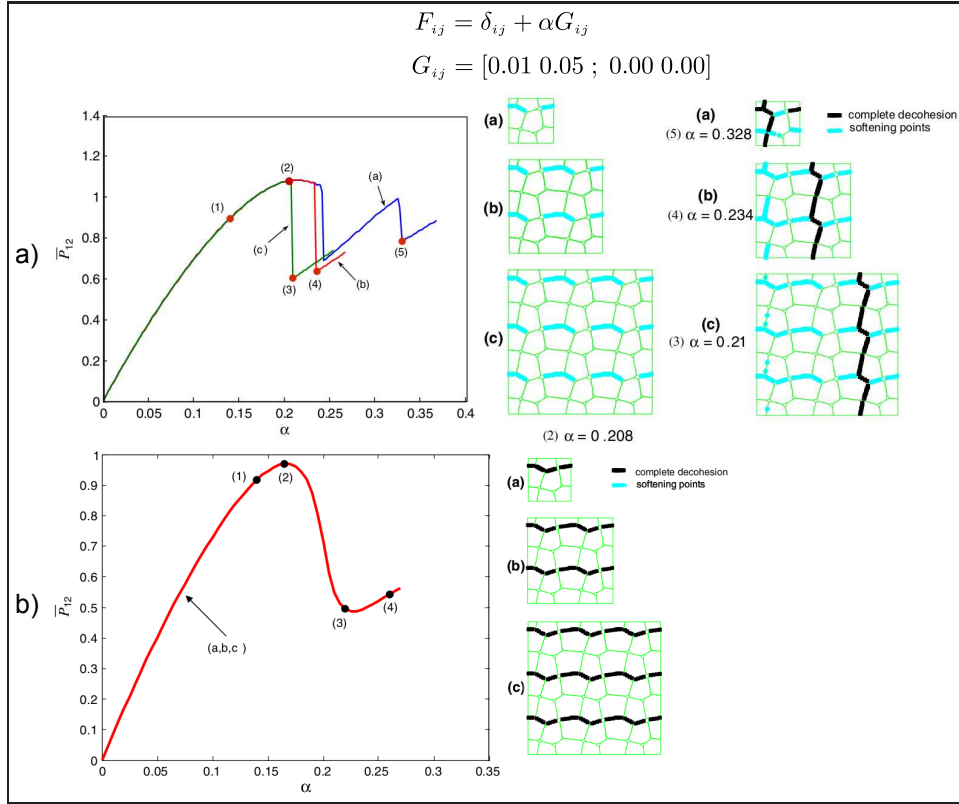


FIGURE 6.4 – Perte de l’hypothèse de périodicité de la microstructure, [21].

Au cours des années de nombreux modèles ont été développés, parmi lesquels nous pouvons citer le modèle de Dugdale en 1960 [57], le modèle de Needleman en 1987 [108], les modèles Tvergaard en 1990 [141], en 1992 [143], celui de [142] décrit dans la section 7.4.2, et le modèle de Camacho Ortiz en 1996 [34] (figure 6.6).

Dans la suite nous utiliserons certaines lois des forces cohésives linéaires avec ramollissement linéaire (section 7.4.2). Cette loi de comportement pour les interfaces cohésives a été déjà utilisée par Geubelle et Baylor en 1998 [73] pour modéliser des phénomènes de délamination dans des plaques de matériaux composites. Dans le cadre des géomatériaux, il n’existe pas de résultats expérimentaux pouvant décrire le comportement des zones cohésives. Pour cette raison, nous avons choisi une loi de comportement facilement définissable d’un point de vue mathématique et qui puisse en même temps décrire l’endommagement d’un matériau.

Formuler des lois cohésives d’interface en grande déformation est compliqué et n’est pas toujours clair d’un point de vue mathématique. Les figures 6.7.a et 6.7.b montrent deux situations possibles où, en grandes déformations, il n’est pas possible de définir de façon unique l’angle α pour exprimer les forces d’interface du repère local au repère global et les composantes du saut en déplacement Δ_i . Pour remédier à ces problèmes, il est nécessaire de faire des hypothèses en plus sur l’état des interfaces. Étant donné

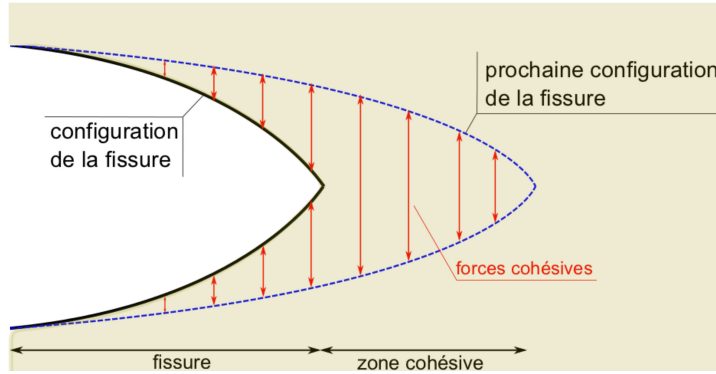


FIGURE 6.5 – Exemple des forces cohésives dans la zone adjacente à une fissure.

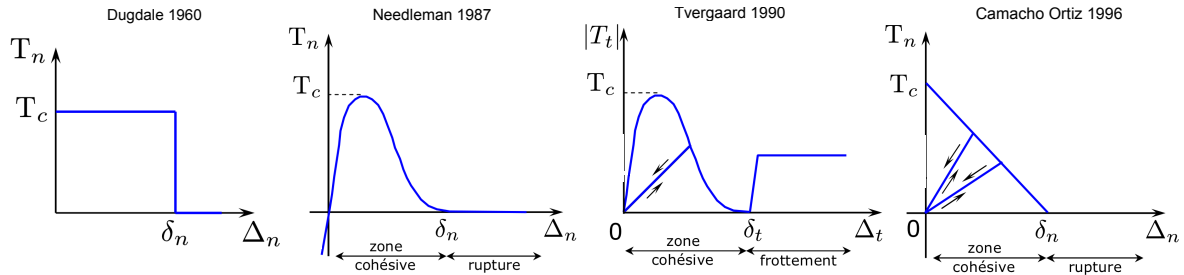


FIGURE 6.6 – Lois de comportement proposées pour la zone cohésive, [20].

que les interfaces ne se déforment pas beaucoup, nous considérons comme angle α celui de l'interface inférieure de façon à pouvoir choisir les composantes Δ_t et Δ_n en bleu de figure 6.7.b pour le calcul des forces d'interfaces.

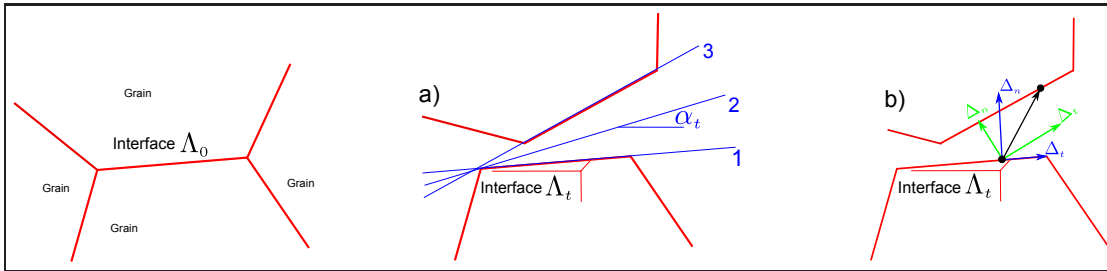


FIGURE 6.7 – Problèmes dans la définition d'une loi de comportement cohésive en grande déformation.

Pour l'étude au niveau d'un point matériel macroscopique, Frey [68] a intégré la loi de comportement des interfaces sous l'hypothèse de petites déformations, $\Lambda_0 \equiv \Lambda_t$. L'angle α est donc celui calculé dans la configuration initiale Λ_0 . Dans le cadre des calculs à deux échelles, nous considérons Λ_0 comme la configuration initiale au début du pas, donc $\Lambda_0 \equiv \Lambda_{n-1}$. Dans ce cas le repère avec lequel nous calculons l'angle α et les composantes du saut en déplacement sera celui qui est cohérent avec l'interface inférieure.

Chapitre 7

La méthode des éléments finis au carré FEM²

7.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de montrer les détails de l'homogénéisation numérique, dans le cadre de la méthode des éléments finis au carré, FEM². À l'échelle macroscopique nous observons un milieu homogénéisé alors qu'à l'échelle microscopique le milieu est composé de cellules unitaires constituant une microstructure qui se répète périodiquement.

La microstructure à la base du modèle microscopique est composée par des grains, des interfaces cohésives et par un réseau de canaux fluides qui se superposent à celui des interfaces cohésives. Chaque composante est modélisée par une loi de comportement. Des conditions aux limites périodiques sont utilisées pour donner une réponse mécanique plus réaliste parmi d'autres types de conditions. Ces conditions périodiques seront utilisées aussi bien pour le problème mécanique que pour le problème hydraulique.

Pour résoudre un problème aux conditions aux limites défini sur la microstructure, il nous faudra vérifier les équations de conservation de la masse et les équations de conservation de la quantité de mouvement, tant pour le domaine fluide que pour le domaine solide.

- Domaine solide :
 - *Équations de conservation de la masse :*
La masse des grains est suivie selon une description Lagrangienne, ce qui fait que sa conservation est automatiquement satisfaite.
 - *Équations de conservation de la quantité de mouvement solide :*
Les équations de conservation de la quantité de mouvement du solide sont imposées par le fait que chaque grain est en équilibre sous l'action des forces
-

d'interface (elles-mêmes en équilibre), de la pression normale du fluide et des forces tangentielles dues à l'écoulement (lesquelles sont équilibrées au niveau fluide). Ces équations constituent les équations du squelette solide du domaine micro.

- Domaine fluide :

- *Équations de conservation de la masse :*

- Ce sont les équations de la phase fluide dans le domaine micro.

- *Équations de conservation de la quantité de mouvement :*

- Les équations de conservation de la quantité de mouvement fluide traduisent l'équilibre de la phase fluide dans le réseau de canaux et nous permettent d'écrire la relation entre le gradient de pression et les efforts tangentiels du fluide sur les grains.

Les équations de conservation de la masse fluide sont résolues avec un processus itératif qui permet de connaître le profil des pressions normales et les forces tangentielles. Pour que le processus itératif converge, il est nécessaire que la valeur moyenne du profil de pressions normales soit très proche d'une pression d'eau macroscopique.

Les équations de conservation de la quantité du mouvement solide sont résolues avec une méthode classique aux éléments finis qui permet de calculer la contrainte du mélange ainsi que les autres quantités nécessaires pour résoudre un problème couplé à l'échelle macroscopique.

Bien que résolues de façon indépendante au cours des itérations, ces équations traduisent le couplage entre la squelette solide et la phase fluide dû au fait que les forces fluides seront ajoutées aux forces des interfaces cohésives afin de trouver une nouvelle configuration d'équilibre qui amènera à une nouvelle configuration des interfaces, donc des nouvelles ouvertures et donc à un nouveau profil des pressions d'eau.

Ce chapitre présente les détails de calcul pour la solution numérique du problème aux conditions aux limites à l'échelle microscopique. Quand le problème mécanique et le problème hydraulique satisferont réciproquement les équations d'équilibre et le bilan de la masse fluide, le problème sur la microstructure pourra être considéré comme résolu.

7.2 Échelle microscopique : définition du problème

Le *Volume Élémentaire Représentatif* de la figure 7.1 caractérise la micro-structure d'un milieu périodique dont le comportement est décrit par deux échelles d'observation. Ce VER est formé de trois composantes :

- **Matrice solide :**

La matrice solide est composée par des éléments assimilables à des grains qui sont imperméables.

- **Interfaces cohésives :**

Le chargement sur le VER est transmis aux grains grâce à des interfaces cohésives qui permettent de transférer des actions de traction et de compression aux particules de la matrice solide.

- **Réseau fluide :**

Nous considérons un réseau fluide, superposé au réseau des interfaces cohésives, qui décrit l'écoulement de l'eau. L'interaction entre le comportement de ce réseau, la matrice solide et les interfaces cohésives caractérisera le comportement couplé du milieu.

Dans le cadre des matériaux rocheux la micro-structure de la figure 7.1 peut représenter à la fois des roches formées par des cristaux et des agrégats argileux selon le comportement constitutif des grains.

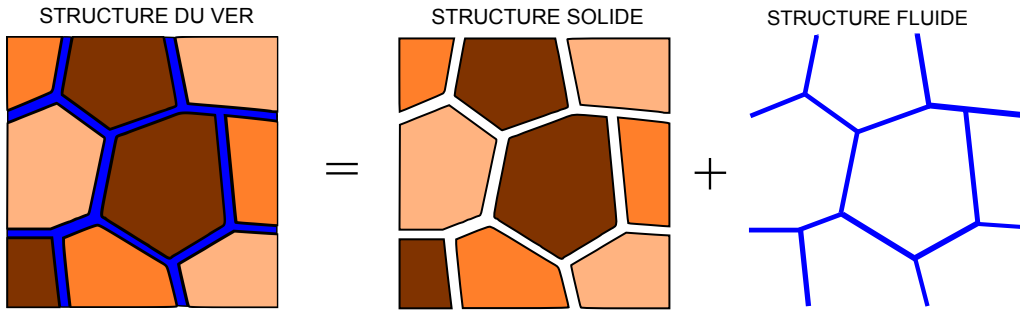


FIGURE 7.1 – Identification de la structure du VER

Afin de démarrer un processus d'homogénéisation numérique, nous définissons le domaine mécanique Ω de la figure 7.2 représentant la microstructure du milieu. Ce domaine sera caractérisé par des côtés de dimension unitaire.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la configuration bidimensionnelle de référence du corps d'intérêt. Envisageant que Ω_i^{grains} et $\Lambda_i^{interfaces}$ correspondent respectivement au domaine des grains et des interfaces, nous pouvons définir la cellule unitaire Ω de la façon suivante :

$$\Omega^s = \Omega^{grain} \cup \Lambda^{interface}$$

$$\Omega^{grain} = \sum_{i=1}^N [\text{int}(\Omega_i^{grain}) \cup \partial\Omega_i^{grain}] \quad \text{et} \quad \Lambda^{interf} = \sum_{i=1}^M [\text{int}(\Lambda_i^{interf}) \cup \partial\Lambda_i^{interf}]$$

M et N étant le numéro total des grains et des interfaces. Nous remarquons que le

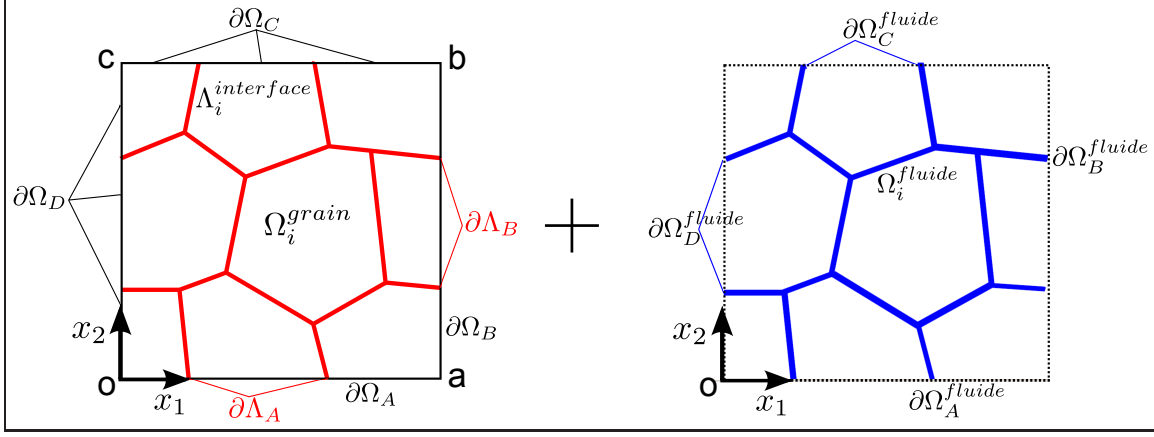


FIGURE 7.2 – Domaine mécanique : les grains (en blanc), les interfaces (en rouge) et le réseau fluide (en bleu)

domaine du problème fluide coïncide avec le réseau des interfaces cohésives, ce qui nous autorise à écrire $\Lambda^{interfaces} \equiv \Omega^{fluide}$.

Pour que le VER ait une structure périodique, les points qui appartiennent à deux côtés opposés doivent présenter des coordonnées en commun selon la condition suivante :

$$\partial\Omega_A \equiv \partial\Omega_C \quad \forall x \in \partial\Omega_A, \partial\Omega_C \quad \text{et} \quad \partial\Omega_B \equiv \partial\Omega_D \quad \forall x \in \partial\Omega_B, \partial\Omega_D$$

Un calcul aux éléments finis est démarré afin de définir une loi de comportement de façon purement numérique. Pour résoudre les équations d'équilibre et les équations sur la conservation de la masse, nous allons définir les conditions aux limites et les lois de comportement qui caractérisent chaque composante de la microstructure ici présentée (sections 7.3 et 7.4).

7.2.1 Remarque sur les degrés de liberté fixés

Afin d'éviter des systèmes algébriques singuliers pendant la résolution numérique aux éléments finis, trois degrés de liberté doivent être bloqués pour un problème de mécanique bidimensionnelle.

Nous allons montrer qu'à partir de la formulation faible de l'équilibre, suite à l'hypothèse de périodicité sur la structure de la cellule et sur les champs inconnus (contrainte et déplacement) Il suffit de bloquer que deux degrés de liberté. De cette façon le mouvement rigide à bloquer ne sera qu'un mouvement de translation. Cette démonstration est détaillée dans la suite sous les hypothèses de petites déformations et loi de comportement linéaire.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \forall x_j \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j w_i^* dA = 0 \quad \forall w^* \in C^1$$

En ajoutant l'hypothèse de périodicité et envisageant que sur deux bords opposés la normale présente deux directions opposées ($n_i^A = -n_i^C$), la formulation faible prend la forme de l'équation 7.2.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \nabla w_{ij}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_A} \sigma_{ij}^A n_j^A (w_i^{A*} - w_i^{C*}) dA + \int_{\partial\Omega_B} \sigma_{ij}^B n_j^B (w_i^{D*} - w_i^{B*}) dA = 0 \quad (7.1)$$

$$\forall w_i^* \in C^1 \text{ et } w_i^* \text{ fonction périodique}$$

Puisque les fonctions w_i^* , σ_{ij} sont périodiques nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \nabla w_{ij}^* d\Omega = 0 \quad \forall w_i^* \in C^1 \text{ et } w_i^* \text{ fonction périodique} \quad (7.2)$$

En introduisant une loi de comportement linéaire et en choisissant comme fonction test $w_i^* = u_i$ nous arrivons à montrer que $\text{sym}(\nabla u_{ij}) = \nabla u_{ij}^s = 0$ puisque la loi de comportement est définie positive $\mathbb{C}_{ijkl}(\nabla u_{kl}) \nabla u_{kl} \geq 0$.

$$\int_{\Omega} \mathbb{C}_{ijkl} \nabla u_{kl}^s \nabla u_{ij}^s d\Omega = 0 \quad \forall u_i \in C^1 \text{ et } u_i \text{ fonction périodique} \quad (7.3)$$

Nous avons prouvé que la partie symétrique du gradient de déplacement est nulle donc le champ de déplacement u_i est linéaire en X_i et représente un mouvement rigide c'est-à-dire une combinaison d'une translation et d'une rotation rigide ($u_i = a_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j X_k$). Il est possible de montrer qu'en appliquant les conditions de périodicité au champ de déplacement rigide u_i le vecteur ω_i est nul. Pour cela nous appelons \overline{X}_i la dimension caractéristique d'un côté de la microstructure.

$$u_i(X_i) = u_i(X_i + \overline{X}_i) \quad \implies \quad \text{Condition de périodicité}$$

$$a_i + \varepsilon_{ijk}^I \omega_j X_k = a_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j (X_k + \overline{X}_k)$$

$$\varepsilon_{ijk} \omega_j (\overline{X}_k) = 0 \quad \implies \quad \omega_j = 0$$

Le même résultat peut être atteint en tenant compte de l'hypothèse de grandes déformations et d'une loi de comportement non-linéaire. La seule différence se trouve dans la complexité de la formulation mathématique.

Dans le paragraphe 7.3 nous présentons les conditions aux limites qui peuvent être considérées pour un problème d'homogénéisation. Comme on vient de le montrer, en vertu de l'hypothèse de périodicité, deux degrés seulement de liberté seront fixés.

I. ε_{ijk} représente le tenseur de Levi-Civita (tenseur de permutation). Il est défini comme suit : $\varepsilon_{ijk} = +1$ si (i,j,k) correspond à (1,2,3), (3,1,2), (2,3,1); $\varepsilon_{ijk} = -1$ si (i,j,k) correspond à (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3); $\varepsilon_{ijk} = 0$ si $i=j$ or $j=k$ or $k=i$

7.3 Échelle microscopique : Conditions aux limites

Les conditions aux limites représentent une hypothèse forte sur le comportement du milieu homogénéisé. En changeant ces conditions le comportement macroscopique sera bien évidemment différent. Nous pouvons donc considérer les conditions aux limites comme faisant partie des hypothèses sur la cinématique qui caractérisent une loi de comportement comme remarqué dans le paragraphe 4.4.1.

Dans un problème d'homogénéisation trois types de conditions aux limites peuvent généralement être appliquées. Celles-ci ont été schématisées comme suit :

- Conditions aux limites en contrainte
 - Conditions homogènes
- Conditions aux limites en déplacement
 - Conditions homogènes
 - Conditions périodiques

7.3.1 Conditions aux limites homogènes

Conditions en contrainte

On impose des vecteurs de contrainte sur la frontière du VER à partir de l'état de contrainte macroscopique σ^m .

$$t_i = [\sigma_{ij}^m] n_j \quad (7.4)$$

n étant la normale à chaque frontière de Ω . Le problème à l'échelle macroscopique sera donc un problème en contrainte.

Conditions en déplacement

On impose des déplacements sur les frontières du VER à partir du gradient de déformation macroscopique ∇u_{ij}^m de manière linéaire de la façon suivante :

$$u_i^t = x_i^t - X_i^t = [F_{ij}^m - I_{ij}] X_j^a = [\nabla u_{ij}^m] X_j \quad \forall X_j \in \partial\Omega \quad (7.5)$$

De cette façon on récupère une contrainte homogénéisée à l'échelle macroscopique. La figure 7.3 montre un exemple de conditions aux limites linéaires.

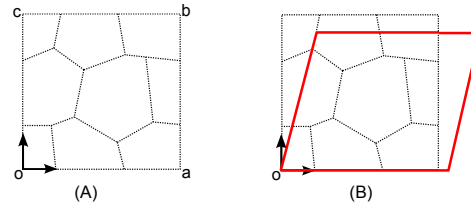


FIGURE 7.3 – (A) Configuration non-déformée, (B) Configuration déformée avec des conditions linéaires

7.3.2 Conditions aux limites périodiques

Problème Mécanique

On impose des différences de déplacement sur les deux frontières en regardant $\partial\Omega_1, \partial\Omega_3$ et $\partial\Omega_2, \partial\Omega_4$ de manière périodique.

$$u_i^{C,t} - u_i^{A,t} = \nabla u_{ij}^m [X_j^C - X_j^A] \quad \forall X_j^C \in \partial\Omega_C, \quad \forall X_j^A \in \partial\Omega_A \quad (7.6)$$

$$u_i^{D,t} - u_i^{B,t} = \nabla u_{ij}^m [X_j^D - X_j^B] \quad \forall X_j^D \in \partial\Omega_D, \quad \forall X_j^B \in \partial\Omega_B \quad (7.7)$$

Nous imposons aussi des déplacements sur les trois coins du VER X^a, X^b et X^c .

$$u_i^{a,t} = x_i^{a,t} - X_i^a = [F_{ij}^m - I_{ij}] X_j^a = [\nabla u_{ij}^m] X_j^a \quad (7.8)$$

$$u_i^{b,t} = x_i^{b,t} - X_i^b = [F_{ij}^m - I_{ij}] X_j^b = [\nabla u_{ij}^m] X_j^b \quad (7.9)$$

$$u_i^{c,t} = x_i^{c,t} - X_i^c = [F_{ij}^m - I_{ij}] X_j^c = [\nabla u_{ij}^m] X_j^c \quad (7.10)$$

Afin de bloquer les mouvements rigides de translation, le noeud O est fixé ($X_i = 0$). Une configuration déformée possible est montrée dans l'image 7.4.

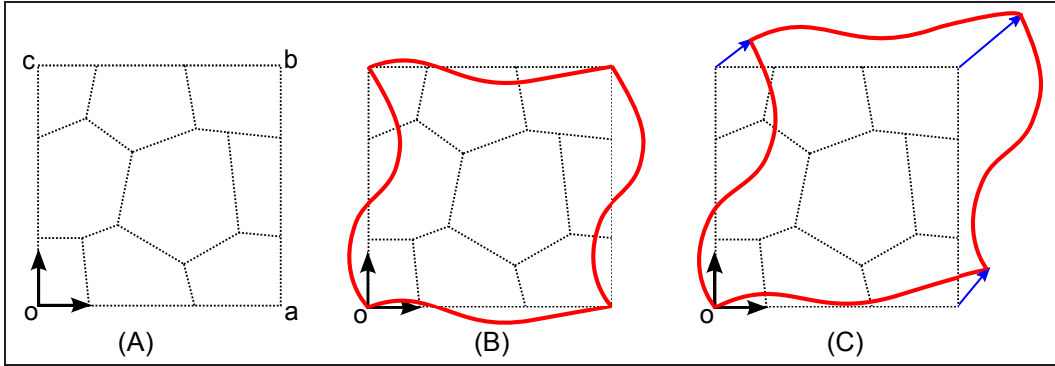


FIGURE 7.4 – (A) Configuration non-déformée, (B) Configuration déformée avec les conditions périodiques, (C) Configuration finale

Problème Hydraulique

Des conditions aux limites périodiques sont aussi imposées sur la frontière du réseau fluide $\partial\Omega^{fluide}$ au niveau d'un gradient de pression macroscopique ∇p_i^m .

$$p_w^{c,t} - p_w^{a,t} = \frac{\partial p^m}{\partial x_1} [x^{c,t} - x^{a,t}] \quad \forall x^{a,t}, x^{c,t} \in \partial\Omega_A^f, \partial\Omega_C^f \quad (7.11)$$

$$p_w^{b,t} - p_w^{d,t} = \frac{\partial p^m}{\partial x_2} [x^{b,t} - x^{d,t}] \quad \forall x^{b,t}, x^{d,t} \in \partial\Omega_B^f, \partial\Omega_D^f \quad (7.12)$$

Pour que la conservation de la masse soit satisfaite, les conditions 7.13.a, 7.13.b doivent être vérifiées.

$$m_1^{a,t} + m_1^{c,t} = 0 \quad m_2^{b,t} + m_2^{d,t} = 0 \quad (7.13)$$

Remarques concernant les conditions aux limites

La réponse mécanique du milieu homogénéisé est très différente selon le choix qu'on fait sur les conditions aux limites du problème. Suquet [132] a déjà montré que, pour un problème linéaire, des conditions homogènes impliquent une rigidité du milieu trop grande par rapport au problème avec des conditions aux limites linéaires.

En figure 7.5 nous observons un essai de traction horizontale pour les deux types de conditions aux limites en déplacement (Frey [68]). La cellule est divisée par une fissure verticale dont le comportement est décrit par une loi d'interface bilinéaire avec endommagement. Cette fissure relie deux parties qui représentent les grains du VER.

Le système avec des conditions aux limites linéaires est plus contraignant que le système avec des conditions périodiques. Le niveau de contrainte observé au cours du processus de dé-cohésion est supérieur à celui nécessaire pour une rupture périodique où le passage à l'adoucissement des éléments le long de l'interface (processus de dé-cohésion) se fait de manière progressive. Les conditions périodiques donnent un comportement du milieu homogénéisé plus réaliste et elles seront prises en compte pour tous les calculs utilisant cette approche numérique afin d'homogénéiser un problème à deux échelle d'observation.

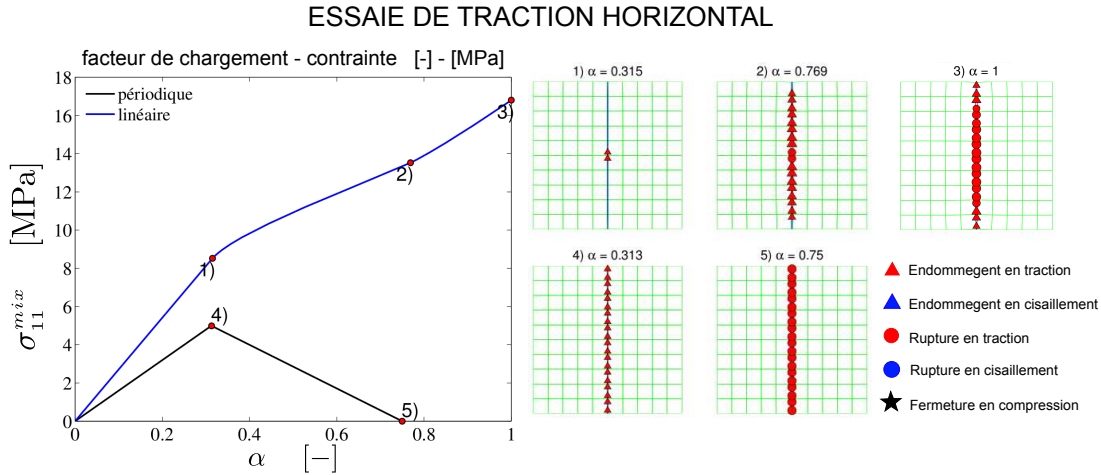


FIGURE 7.5 – Simulation de traction horizontale : évolution du calcul, Frey [68]

7.4 Échelle microscopique : Lois de comportement

Le squelette solide de la microstructure est composé d'un assemblage de grains liés par des interfaces cohésives. Chaque composante de la cellule est modélisée par une loi de comportement qui nous permet de connaître le champ de contrainte nécessaire à l'équilibre du solide.

- **Squelette solide**

Modèle hyper-élastique isotrope en grandes déformations

- **Interfaces cohésives**

Modèle élastique linéaire avec adoucissement linéaire et endommagement.

7.4.1 Squelette solide

Nous parlons d'*hyperélasticité* si la réponse mécanique d'un milieu continu ne dépend pas du parcours de chargement, c'est-à-dire si le travail fait par la contrainte pendant un processus de déformation peut être décrit par son état initial et par son état final. Nous définissons un *potentiel élastique* Ψ selon l'équation 7.14. Cette fonction représente l'énergie conservée dans le milieu par unité de volume non-déformé.

$$\Psi = \int_{t_0}^t P_{ij} \dot{F}_{ij} dt \quad \text{avec} \quad \dot{\Psi} = P_{ij} \dot{F}_{ij} \quad (7.14)$$

La fonction F_{ij} représente un gradient de déformation et P_{ij} sa variable conjuguée en contrainte (première contrainte de Piola-Kirchoff, équation 7.15.b).

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}} \dot{F}_{ij} \quad \implies \quad P_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial F_{ij}} \quad (7.15)$$

Afin de décrire le comportement matériel d'un milieu de façon objective, la contrainte et par conséquent la loi de comportement, doivent être indépendants par rapport aux mouvements rigides du milieu. Le concept d'objectivité d'une loi de comportement est décrit par le théorème de Noll [138].

Théorème de Noll 7.4.1 *La loi de comportement donnée dans le référentiel \mathcal{R} par :*

$$\sigma_{ij}^{\mathcal{R}} = \mathcal{F}(F_{ij}^{\mathcal{R}} ; -\infty < \tau < t)$$

est objective si et seulement si elle est de la forme :

$$\sigma_{ij}^{\mathcal{R}} = R_{ik}^{\mathcal{R}} [\mathcal{H}(U_{kl}^{\mathcal{R}} ; -\infty < \tau < t)] R_{jl}^{\mathcal{R}}$$

où $R_{ik}^{\mathcal{R}}$ et $U_{kl}^{\mathcal{R}}$ sont définis par la décomposition polaire de $F_{ij}^{\mathcal{R}}$:

$$F_{ij}^{\mathcal{R}} = R_{ik}^{\mathcal{R}} U_{kj}^{\mathcal{R}}$$

Pour qu'une loi de comportement hyperélastique puisse respecter le théorème de Noll il suffit d'écrire le potentiel élastique en fonction du tenseur de Cauchy-Green de droite C_{ij} .

$$\Psi(X_i, F_{ij}) = \Phi(X_i, C_{ij}) \quad (7.16)$$

Le potentiel élastique Φ et sa variable conjuguée en contrainte (deuxième contrainte de Piola-Kirchoff S_{ij}) peuvent donc être redéfinis selon l'équation 7.17 où le tenseur E_{ij} représente le tenseur de déformation de Green.

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial E_{ij}} \iff \begin{cases} \Phi = \int_{t_0}^t S_{ij} \dot{C}_{ij} dt \\ \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial C_{ij}} \dot{C}_{ij} = \frac{1}{2} S_{ij} \dot{C}_{ij} \end{cases} \quad (7.17)$$

Nous pouvons restreindre l'ensemble des lois de comportement élastique à celui dont le comportement est isotrope. De cette façon l'équation 7.16 peut être écrite en fonction des invariants du tenseur C_{ij} :

$$\Phi(X_i, C_{ij}) = \hat{\Phi}(X_i, I_C, II_C, III_C) \implies \begin{cases} I_C = C_{ij} \delta_{ij} \\ II_C = \text{tr}(C_{ik} C_{kj}) = C_{ij} C_{ij} \\ III_C = \det(C_{ij}) = J^2 \end{cases} \quad (7.18)$$

En utilisant l'équation 7.17.a, la loi de comportement présente la forme de l'équation 7.19.

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial C_{ij}} = 2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} + 2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} + 2 \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \quad \begin{cases} \frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \\ \frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} = C_{ij} \\ \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = J^2 C_{ij}^{-1} \end{cases} \quad (7.19)$$

Pour la plupart des cas dans les applications numériques, la contrainte prise en compte est celle de Cauchy σ_{ij} ; nous pouvons donc récrire l'équation 7.19.a en tenant compte du tenseur gauche de Cauchy-Green b_{ij} et de sa variable conjuguée en contrainte, le tenseur de Cauchy σ_{ij} .

$$\begin{aligned} b_{ij} &= F_{ik} F_{jk} & \sigma_{ij} &= J^{-1} F_{ik} S_{kl} F_{jl} \\ \sigma_{ij} &= 2J^{-1} \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial I_C} \right] b_{ij} + 4J^{-1} \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial II_C} \right] b_{ik} b_{jk} + 2J \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial III_C} \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Il est possible de montrer qu'en petites déformations, pour l'élasticité linéaire isotrope, il existe une seule expression du potentiel plastique. En grandes déformations, plusieurs expressions du potentiel peuvent être proposées pour avoir un modèle isotrope, à condition que l'équation 7.18 soit satisfaite. Bonet et Wood dans [23] présentent certaines expressions du potentiel élastique isotrope $\hat{\Phi}$.

Dans la suite de cette étude, le potentiel élastique envisagé pour décrire le comportement des grains est celui qui caractérise les matériaux *compressibles Neo-Hookean*.

Les expressions du potentiel élastique $\hat{\Phi}$, de la première contrainte de Piola-Kirchoff S_{ij} et de la contrainte de Cauchy σ_{ij} sont proposés dans les équations 7.21.a, 7.21.b¹ et 7.21.b².

$$\hat{\Phi} = \frac{\mu}{2} (I_C - 3) - \mu (\ln J) + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 \quad \begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{\mu}{J} (b_{ij} - \delta_{ij}) + \frac{\lambda}{J} \delta_{ij} \\ S_{ij} = \mu (\delta_{ij} - C_{ij}^{-1}) + \lambda (\ln J) C_{ij}^{-1} \end{cases} \quad (7.21)$$

7.4.2 Interfaces cohésives

A l'intérieur de la cellule, il est nécessaire de définir des conditions sur les interfaces cohésives afin de pouvoir calculer la valeur des forces cohésives qui assemblent les grains du squelette solide.

Si on considère une configuration de référence du VER, deux points matériels qui appartiennent aux bords opposés d'une interface seront parfaitement coïncidents ($X_i^A \equiv X_i^B$). Puisque les grains se déforment pendant le chargement, les points sur leurs frontières tendent à se déplacer comme dans la figure 7.6. Nous pouvons donc définir l'ouverture d'une fissure selon l'équation 7.22.

$$\Delta u_i^{AB} = u_i^B - u_i^A \quad \begin{cases} u_i^B = x_i^B - X_i^B \\ u_i^A = x_i^A - X_i^A \end{cases} \quad (7.22)$$

En envisageant un repère local à l'interface (N^o et T^o vecteurs unitaires respectivement tangentiel et normal) nous utilisons les deux composantes de Δu_i^{AB} pour calculer les forces d'interfaces :

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1^{AB} \\ \Delta u_2^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_t \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} t_t \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{tt}(\Delta_t, \Delta_n) & f_{tn}(\Delta_t, \Delta_n) \\ f_{nt}(\Delta_t, \Delta_n) & f_{nn}(\Delta_t, \Delta_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_t \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Les fonctions f_{tt} , f_{tn} , f_{nt} et f_{nn} permettent de définir, pour calculer les forces cohésives d'interfaces, une loi de comportement qui peut être résumée comme suit :

$$t_i = \mathcal{F}_{ij}(\Delta_t, \Delta_n) \Delta_j \quad (7.24)$$

Une loi de comportement avec endommagement est donc considérée dans la suite de cette étude afin de décrire le processus de dé-cohésion des grains. Les fonctions f_{nt} , f_{tn} hors diagonale seront considérées nulles donc les interfaces seront caractérisées par un comportement découplé.

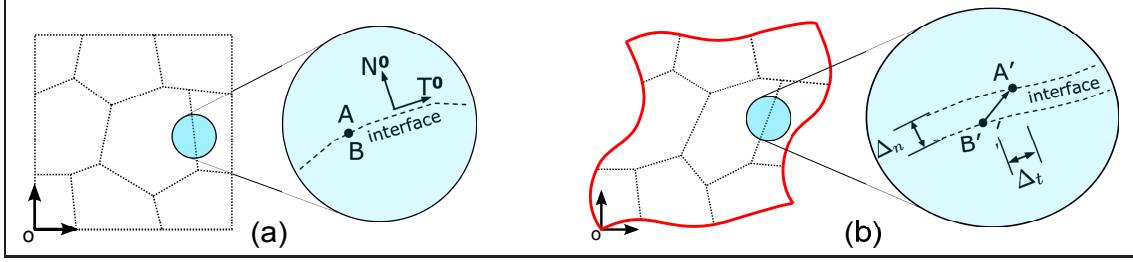


FIGURE 7.6 – Schématisation des interfaces : a) configuration initiale, b) configuration déformée

Lois cohésive découplée

Afin d'écrire une relation permettant de calculer les forces d'interfaces t_i en fonction du saut en déplacement Δ_i nous définissons des variables d'états non-dimensionnelles λ_t et λ_n . Ces variables dépendent que par la respective composante Δ_i donnant à l'interface un comportement découplé.

$$\lambda_t = \left| \frac{\Delta_t}{\delta_t} \right| \quad \lambda_n = \left| \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right| \quad (7.25)$$

Les variables δ_t et δ_n représentent le saut en déplacement critique dans le repère local après lequel la force cohésive est nulle. La fissure s'ouvre donc sans opposer aucune force. La loi de comportement pour les interfaces peut être exprimée avec les équations 7.26.a et 7.26.b :

$$\boxed{t_t = \Delta_t f_{tt}} \quad \boxed{t_n = \Delta_n f_{nn}} \quad (7.26)$$

Dans l'annexe C.1 on montre que cette façon d'écrire la loi de comportement est la même que celle de l'équation 7.23.b écrite en fonction du saut en déplacement. Nous remarquons que si l'interface atteint l'ouverture de rupture $\Delta_i^{rupt.}$ la variable d'état λ_i assumera une valeur unitaire $\lambda_i^{rupt.} = 1$.

Comme il est possible de voir en figure 7.7, quatre différents comportements sont possibles dans cette loi. L'incrément $\Delta\lambda_i = \lambda_i^n - \lambda_i^{n-1}$ représente la différence entre les valeurs de λ_i entre deux step consécutifs.

- Charge/Décharge Élastique (**CD-EL**) : $0 < \lambda_i < \lambda_i^{el.}$ et $\Delta\lambda_i \geq 0$
- Charge en Endommagement (**C-END**) : $\lambda_i^{el.} < \lambda_i < \lambda_i^{rup.}$ et $\Delta\lambda_i \geq 0$
- Décharge en Endommagement (**D-END**) : $0 < \lambda_i < \lambda_i^{max}$ et $\Delta\lambda_i < 0$
- Charge en Rupture (**RUP**) : $\lambda_i > \lambda_i^{rup}$ et $\Delta\lambda_i \geq 0$

Les conditions sur λ_i sont valides pour les forces tangentiels et pour celles normales en comportement de traction. Dans ce dernier cas il est nécessaire de vérifier que $\Delta_n > 0$

autrement le comportement de l'interface sera en compression et une loi de contact sera nécessaire. Les fonctions f_{tt} et f_{nn} qui définissent la loi de comportement de la

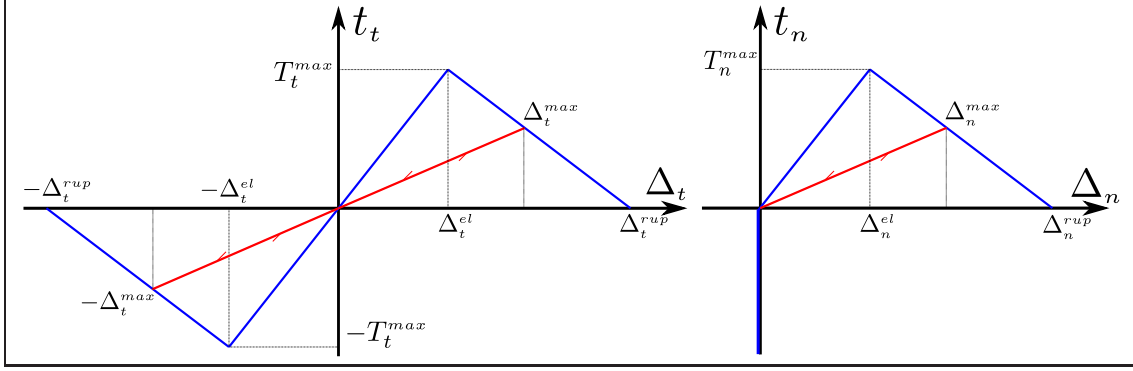


FIGURE 7.7 – Comportement tangentiel et normal pour les forces d'interfaces

figure 7.7 sont définies dans le tableau 7.1.

-	CD-EL	C-END	D-END	RUP
f_{tt}	$\frac{T_t^{mx}}{\lambda_t^{el}} \frac{1}{\delta_t}$	$\left(\frac{T_t^{mx}}{\lambda_t^{el} - 1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_t^{mx}} \right) \frac{1}{\delta_t}$	$\left(\frac{T_t^{mx}}{\lambda_t^{el} - 1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_t^{mx}} \right) \frac{1}{\delta_t}$	0
f_{nn}	$\frac{T_n^{mx}}{\lambda_n^{el}} \frac{1}{\delta_n}$	$\left(\frac{T_n^{mx}}{\lambda_n^{el} - 1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_n^{mx}} \right) \frac{1}{\delta_n}$	$\left(\frac{T_n^{mx}}{\lambda_n^{el} - 1} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_n^{mx}} \right) \frac{1}{\delta_n}$	0

TABLE 7.1 – Description des fonctions f_{tt} et f_{nn} .

Pour décrire le comportement en compression, une loi de contact élastique non-linéaire est utilisée (équation 7.27).

$$t_n = -k \Delta_n^2 + \left[\frac{T_n^{mx}}{\Delta_n^{el}} \right] \Delta_n \quad \Delta_n < 0, \quad \lambda_n \geq 0 \quad (7.27)$$

Le paramètre T_n^{mx}/Δ_n^{el} représente la raideur du comportement en traction et permet d'assurer la continuité entre la raideur du comportement et la dérivée du comportement en compression.

La loi de contact de l'équation 7.27 permet d'estimer les forces de contact acceptant qu'une compénétration réciproque entre deux grains est possible. La valeur de cette compénétration dépend strictement de la pente k de la parabole (équation 7.27). Ce paramètre a été fixé $k = 10^{15}$ qui représente un bon compromis entre les deux situations limites :

1. Une valeur trop basse de k implique des valeurs de compénétration trop grandes qui écartent la modélisation des forces de contact de la réalité.

2. Une valeur trop grande de k implique des compénérations très faibles et au même temps des forces de contact t_n trop importants qui peuvent conduire à des problèmes de convergence sur un pas de temps. Considérer des forces de contact aussi grandes peut impliquer que l'interface entre deux itérations passe d'un comportement de compression à un comportement de traction sans jamais trouver une configuration d'équilibre stable.

Lois cohésive couplée

Tvergaard [142] a proposé une loi de comportement couplée entre la composante tangentielle et normale de l'ouverture de l'interface. Ce couplage est défini au niveau de la variable d'état λ (équation 7.28.a).

$$\lambda = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right)^2} & \Delta_n \geq 0 \\ \left|\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right| & \Delta_n < 0 \end{cases} \quad f(\lambda) = \frac{27}{4} (1 - 2\lambda + \lambda^2) T^{max} \quad (7.28)$$

Les comportements normal t_n et tangentiel t_t des forces cohésives peuvent être finalement décrits comme suit :

$$t_t(\lambda) = \begin{cases} \left[\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right] f(\lambda) & \Delta_n \geq 0 \\ \left[\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right] f(\lambda) - \text{sign}(\Delta_t) \mu_f t_n & \Delta_n < 0 \end{cases} \quad t_n(\lambda) = \begin{cases} \left[\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right] f(\lambda) & \Delta_n \geq 0 \\ k_n \Delta_n & \Delta_n < 0 \end{cases}$$

Dans cette loi de comportement les forces de contact sont calculées avec une rela-

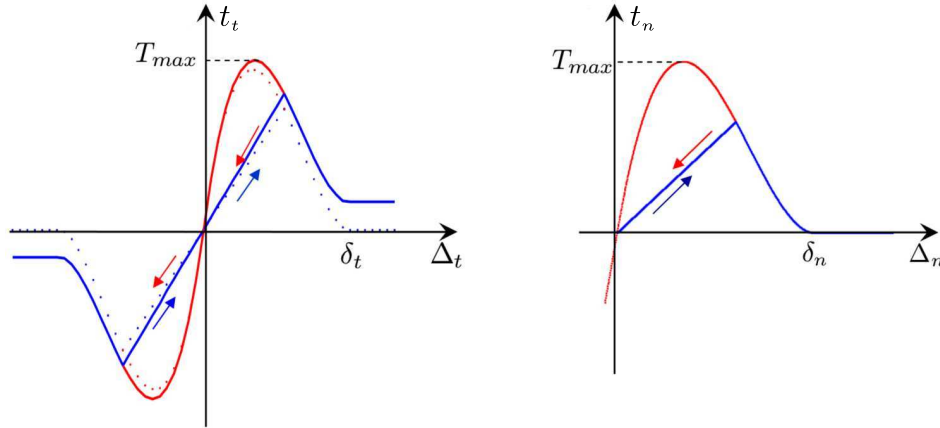


FIGURE 7.8 – Loi de comportement couplée

tion linéaire entre les déplacements de compénétration et un coefficient de pénalisation k_n . Le paramètre μ_f représente le frottement de Coulomb final qui est activé progressivement avec la décohesion de l'interface. Dans la suite de cette étude la loi de comportement découplée (section 7.4.2) sera utilisée.

7.5 Échelle microscopique : Solution numérique

Afin d'obtenir une solution numérique couplée à l'échelle macroscopique pour un problème aux conditions aux limites, il est nécessaire que la loi de comportement puisse nous donner les quantités suivantes :

- La contrainte totale σ_{ij}
- La densité ρ
- La variation de la quantité de masse fluide \dot{M}
- Le flux massique m_i

Généralement une loi constitutive a pour objectif de modéliser les quantités précédentes à partir du comportement des matériaux à l'échelle de laboratoire. En utilisant une méthode d'homogénéisation le comportement du milieu est déduit de sa description à l'échelle micro.

Dans la méthode des *éléments finis au carré* l'homogénéisation est faite en résolvant un calcul aux éléments finis avec un algorithme classique de Newton-Raphson sur une cellule unitaire qui représente la microstructure du milieu.

Afin de passer de la formulation forte de l'équilibre ($\text{div}\sigma_{ij} - f_i = 0$) au système algébrique linéaire du milieu discrétisé, nous écrivons le principe du travail virtuel sur le domaine des grains. L'équation 7.29 montre le travail virtuel interne (terme de gauche) et le travail virtuel externe (terme de droite).

$$\int_{\Omega^g} \sigma_{ij}^g \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} d\Omega = + \int_{\Lambda^+} t_i^+ u_i^{*+} d\Lambda^+ + \int_{\Lambda^-} t_i^- u_i^{*-} d\Lambda^- \quad (7.29)$$

Ω^g , Λ^+ et Λ^- indiquent respectivement le domaine du grain, le domaine de la lèvres supérieure de l'interface et celui de la lèvres inférieure.

7.5.1 Application de la méthode de Newton-Raphson

Nous récrivons l'équation du principe de travail virtuel envisageant une discrétisation du temps avec un nombre fini de pas n ($t = [t^0, t^1, t^2 \dots t^n]$). Afin de résoudre le problème numériquement avec un algorithme de Newton-Raphson nous considérons l'équation 7.29 au pas n et à l'itération i .

Puisque la configuration $\Omega^{n,i}$ n'est pas une configuration d'équilibre le résiduel $R^i(u_i^*)$ correspondant à l'itération i est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} R^i(u_i^*) &= \\ &= \int_{\Omega^{g,n,i}} [\sigma_{ij}^{g,n,i}] \left[\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right] d\Omega^{g,n,i} - \int_{\Lambda^{n,i,+}} [t_i^{n,i,+}] [u_i^{*+}] d\Lambda^{n,i,+} - \int_{\Lambda^{n,i,-}} [t_i^{n,i,-}] [u_i^{*-}] d\Lambda^{n,i,-} \end{aligned} \quad (7.30)$$

Pour démarrer un processus itératif, chaque terme de l'équation 7.29 est linéarisé. Sans entrer dans les détails des passages mathématiques qui sont expliqués dans Wood [23] et Frey [68], nous montrons dans la suite les résultats pour chaque terme linéarisé de l'équation du travail virtuel.

Linéarisation du travail virtuel interne

La linéarisation du travail interne (équation 7.31) est composée d'un terme rhéologique et d'un terme géométrique.

$$\int_{\Omega^{g,n}} \delta \left[\sigma_{ij}^{g,n} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right] d\Omega^{g,n} = \int_{\Omega^{g,n}} \mathbb{C}_{ijkl} \left[\frac{\partial \delta u_k^n}{\partial x_l^n} \frac{\partial u_i^{*n}}{\partial x_j^n} \right] + \sigma_{ij}^{g,n} \left[\frac{\partial \delta u_k^n}{\partial x_i^n} \frac{\partial u_k^{*n}}{\partial x_j^n} \right] d\Omega^{g,n} \quad (7.31)$$

Le tenseur du quatrième ordre \mathbb{C}_{ijkl} correspond à la loi de comportement incrémental pour un matériau compressible Neo-Hookean (paragraphe 7.4.1).

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\lambda}{J} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{J} [\mu - \lambda \ln(J)] \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (7.32)$$

Nous remarquons que l'équation 7.32 a la même structure que celle de l'élasticité linéaire isotrope si nous considérons que $\lambda' = \lambda/J$ et $\mu' = 2[\mu - \lambda \ln(J)]/J$.

Linéarisation du travail virtuel externe

La linéarisation du travail virtuel externe est faite à partir de l'hypothèse que les forces cohésives sont appliquées à la surface initiale Λ_0 des interfaces. Cette hypothèse implique que la surface au cours du temps t peut être confondue avec celle de l'état courant ($\Lambda \equiv \Lambda_0$) où toutes les interfaces sont fermées. Les raisons de ce choix sont détaillées dans la section 6.2.2.

En commençant par la contribution de la force sur la lèvre supérieure de l'interface t_i^+ , nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda^+} \delta (t_i^{n,+} u_i^{*n}) d\Lambda^+ &= \int_{\Lambda_0^+} \delta (t_i^{0,+} u_i^{*n}) d\Lambda_0^+ = \\ &= \int_{\Lambda_0^+} \delta (t_i^{0,+}) u_i^{*n} d\Lambda_0^+ = \int_{\Lambda^+} \delta (t_i^{0,+}) \frac{d\Lambda_0^+}{d\Lambda^+} u_i^{*n} d\Lambda^+ \end{aligned} \quad (7.33)$$

En considérant l'équation 7.24 nous allons calculer une expression incrémentale de la loi de comportement pour les interfaces cohésives. \mathcal{S}_{ij} représente la matrice tangente.

$$\delta t_i^+ = \left[\frac{\partial t_i^+}{\partial \Delta_j^+} \right] \delta \Delta_j^{n,+} = \mathcal{S}_{ij} (\delta u_i^{n,-} - \delta u_i^{n,+}) = \mathcal{S}_{ij} \delta u_i^{n,-} - \mathcal{S}_{ij} \delta u_i^{n,+} \quad (7.34)$$

$$\delta t_i^- = \left[\frac{\partial t_i^-}{\partial \Delta_j^-} \right] \delta \Delta_j^{n,-} = \mathcal{S}_{ij} (\delta u_i^{n,+} - \delta u_i^{n,-}) = \mathcal{S}_{ij} \delta u_i^{n,+} - \mathcal{S}_{ij} \delta u_i^{n,-} \quad (7.35)$$

Nous arrivons à l'expression du travail virtuel externe (7.36) en substituant l'équation 7.34 dans l'équation 7.33.

$$\boxed{\int_{\Lambda^+} \delta(t_i^{n,+} u_i^{*n}) d\Lambda^+ = \int_{\Lambda^+} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,-}) \frac{d\Lambda_0^+}{d\Lambda^+} u_i^{*n} d\Lambda^+ - \int_{\Lambda^+} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,+}) \frac{d\Lambda_0^+}{d\Lambda^+} u_i^{*n} d\Lambda^+} \quad (7.36)$$

Suivant les mêmes passages analytiques nous linéarisons la force cohésive de la lèvres inférieure de l'interface et obtenons l'équation 7.37.

$$\boxed{\int_{\Lambda^-} \delta(t_i^{n,-} u_i^{*n}) d\Lambda^- = \int_{\Lambda^-} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,+}) \frac{d\Lambda_0^-}{d\Lambda^-} u_i^{*n} d\Lambda^- - \int_{\Lambda^-} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,-}) \frac{d\Lambda_0^-}{d\Lambda^-} u_i^{*n} d\Lambda^-} \quad (7.37)$$

Pour chaque état de la fissure une matrice tangente \mathcal{S}_{ij} peut être calculée. En cas de forces tangentielles et de traction, la matrice tangente peut être calculée selon l'équation 7.38.

$$\mathcal{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_i}{\partial \Delta_t} & 0 \\ 0 & \frac{\partial t_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial t_i}{\partial \Delta_t} = f(\lambda_i) + \left[\frac{\partial f(\lambda_i)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \Delta_t} \right] \Delta_i \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \Delta_i} = \frac{\text{sign}(\Delta_i)}{\delta_i} \quad \frac{\partial f(\lambda_i)}{\partial \lambda_i} = \begin{cases} 0 & \text{CD-E} \\ \frac{1}{\delta_i} \left[\frac{T^{mx}}{\lambda_i^{el.} - 1} \right] \left[\frac{1}{\lambda_i^{mx}} \right]^2 & \text{C-END} \\ 0 & \text{D-END} \\ 0 & \text{RUP} \end{cases} \quad (7.39)$$

Pour le cas des forces normales en compression la constante de pénalisation est imposée comme suit :

$$\delta t_n = k \delta \Delta_n$$

L'équation linéarisée que nous allons résoudre avec une méthode itérative de Newton-Raphson est la 7.40.

$$\begin{aligned} R(u_i^*) = & \int_{\Omega^{g,n}} \mathbb{C}_{ijkl} \left[\frac{\partial \delta u_k^n}{\partial x_l^n} \frac{\partial u_i^{*n}}{\partial x_j^n} \right] + \sigma_{ij}^{g,n} \left[\frac{\partial \delta u_k^n}{\partial x_i^n} \frac{\partial u_k^{*n}}{\partial x_j^n} \right] d\Omega^{g,n} + \\ & + \int_{\Lambda^-} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,+}) \frac{d\Lambda_0^-}{d\Lambda^-} u_i^{*n} d\Lambda^- - \int_{\Lambda^-} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,-}) \frac{d\Lambda_0^-}{d\Lambda^-} u_i^{*n} d\Lambda^- + \\ & + \int_{\Lambda^+} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,-}) \frac{d\Lambda_0^+}{d\Lambda^+} u_i^{*n} d\Lambda^+ - \int_{\Lambda^+} \mathcal{S}_{ij} \delta(u_i^{n,+}) \frac{d\Lambda_0^+}{d\Lambda^+} u_i^{*n} d\Lambda^+ \quad (7.40) \end{aligned}$$

Le terme de droite de l'équation 7.40 est souvent appelé *opérateur auxiliaire linéaire*.

Nous remarquons que l'équation 7.40 est définie dans le repère global de la microstructure alors que les forces t_i et les ouvertures Δ_i des interfaces sont calculées à partir d'un repère local à l'interface. Pour que la formulation soit cohérente, il est nécessaire de faire un changement de repère :

1. Définition des ouverture des interfaces Δ_i du repère global au repère local.
2. Calcul des forces d'interfaces t_i dans le repère local.
3. Changement de repère pour les forces d'interfaces t_i , passage du repère local au repère global.
4. Changement de repère pour la matrice tangente \mathcal{S}_{ij} , passage du repère local au repère global

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{Changement de repère} \quad \begin{cases} 1. \Delta_i^{local} = R_{ij} \Delta_j^{global} \\ 2. t_i^{local} = \mathcal{F}_{ij} \Delta_j^{local} \\ 3. t_i^{global} = R_{ji} t_j^{local} \\ 4. \mathcal{S}_{ij}^{global} = R_{\alpha i} \mathcal{S}_{\alpha\beta}^{local} R_{\beta j} \end{cases} \quad (7.41)$$

L'angle α représente l'inclinaison de l'interface dans la configuration initiale. Les détails concernant l'implémentation sont présentés dans la section 7.7.1.

7.5.2 Discrétisation spatiale du problème continu

Pour résoudre de façon numérique l'équation 7.40 par un système algébrique linéaire de type $[\mathcal{K}_{ij}] [U_j] = F_i$ nous discrétisons le domaine sur la microstructure en éléments finis.

Nous allons utiliser pour les grains des éléments à quatre noeuds intégrés sur quatre points de Gauss, pour les interfaces cohésives des éléments unidimensionnels à deux noeuds intégrés sur deux points de Gauss. Les éléments des interfaces seront superposés sur le bord des grains pour que la contribution des forces cohésives puisse être appliquée aux grains.

Les fonctions de forme envisagées dans l'espace de l'élément parent (O, ξ, η) sont les suivantes :

$$\text{Grains : } \begin{cases} N_1 = \frac{1}{4} (1 - \eta) (1 - \xi) \\ N_2 = \frac{1}{4} (1 + \eta) (1 - \xi) \\ N_3 = \frac{1}{4} (1 + \eta) (1 + \xi) \\ N_4 = \frac{1}{4} (1 - \eta) (1 + \xi) \end{cases} \quad \text{Interfaces : } \begin{cases} N_1 = \frac{1}{2} (1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{2} (1 + \eta) \end{cases} \quad (7.42)$$

En suivant ce schéma d'intégration, ces types d'éléments pourraient présenter des problèmes de blockage (locking) si le comportement des grains et des interfaces tendent vers une limite d'incompressibilité. Toutefois en utilisant les paramètres présentés dans le tableau 8.2 ces problèmes n'apparaissent pas dans les calculs à l'échelle macroscopique présentés dans le chapitre 8.

L'élément utilisé pour décrire la géométrie discrétisée est le même que celui utilisé pour approximer les fonctions inconnues du problème σ_{ij} , u_{ij} . Dans ce cas nous parlons d'*éléments isoparamétriques*.

Nous exprimons les positions, corrections de déplacement et quantités virtuelles dans le repère de l'élément parent.

$$\begin{aligned}
 [X_{noeud}^{grains}] &= \begin{bmatrix} x_1^{(-1,-1)} \\ x_2^{(-1,-1)} \\ x_1^{(+1,-1)} \\ x_2^{(+1,-1)} \\ x_1^{(+1,+1)} \\ x_2^{(+1,+1)} \\ x_1^{(-1,+1)} \\ x_2^{(-1,+1)} \end{bmatrix} & [\delta U_{noeud}^{grains}] &= \begin{bmatrix} \delta U_1^{(-1,-1)} \\ \delta U_2^{(-1,-1)} \\ \delta U_1^{(+1,-1)} \\ \delta U_2^{(+1,-1)} \\ \delta U_1^{(+1,+1)} \\ \delta U_2^{(+1,+1)} \\ \delta U_1^{(-1,+1)} \\ \delta U_2^{(-1,+1)} \end{bmatrix} & [X_{noeud}^{inter.}] &= \begin{bmatrix} x_1^{(-1,-1)} \\ x_2^{(-1,-1)} \\ x_1^{(+1,-1)} \\ x_2^{(+1,-1)} \end{bmatrix} \\
 & & & & [\delta U_{noeud}^{inter.}] &= \begin{bmatrix} \delta U_1^{(-1,-1)} \\ \delta U_2^{(-1,-1)} \\ \delta U_1^{(+1,-1)} \\ \delta U_2^{(+1,-1)} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (7.43)$$

Nous utilisons les matrices $[B_{ij}]$ et $[T_{ij}]$ pour connecter les quantités sur l'élément courant $\delta U_{(x,y)}$ aux quantités sur l'élément parent $\delta U_{(\xi,\eta)}$.

$$[\delta U_i^{(x,y)}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

$$[\delta U_i^{(x,y)}] = [B_{ij}] [U_i^{(\xi,\eta)}] \quad [B_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

$$[\delta U_i^{(\xi,\eta)}] = [T_{ij}] [U_{noeud}] \quad [T_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

Le gradient du champ de vitesse est calculé comme suit :

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial \xi_k} \left[\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \right]^{-1} \quad \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = [B]_{ij} [X_{noeud}^{grains}]_j$$

Les déplacements des éléments d'interfaces superposés sur la frontière des grains seront décrits de façon approximée en utilisant l'équation 7.47.a.

$$[U_i^{(x,y)}] = [N_{ij}] [U_j^{(\xi,\eta)}] \quad N_{ij} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

Discrétisation du résidu

Nous récrivons l'équation 7.30 en considérant les champs définis sur un élément courant précédemment calculés. Afin de pouvoir intégrer numériquement l'équation du résidu, chaque contribution au résidu est rapportée dans le domaine de l'élément parent.

Nous écrivons ci-dessous les équations concernant le résidu pour les efforts internes, la lèvre supérieure et la lèvre inférieure des interfaces au niveau de l'élément.

$$\begin{aligned} [\sigma^n] &= [\sigma_{11} \ \sigma_{12} \ \sigma_{21} \ \sigma_{22}] & [R_{grains}^e] &= \int_{\Omega_{par}} [B]^T [T]^T [\sigma^n] J^{x\xi} d\Omega_{par} \\ [t^{n,+}] &= [t_1^+ \ t_2^+] & [R_{interf.}^{e,+}] &= \int_{\Lambda_{par}^+} [N^T] [t^+] A^{x\xi} d\Lambda_{par}^+ \\ [\sigma^{n,-}] &= [t_1^- \ t_2^-] & [R_{interf.}^{e,-}] &= \int_{\Lambda_{par}^-} [N^T] [t^-] A^{x\xi} d\Lambda_{par}^- \end{aligned}$$

Discrétisation de l'opérateur auxiliaire linéaire

En substituant les fonctions 7.45 et 7.46 dans l'équation 7.40 nous arrivons à écrire la contribution à la matrice de rigidité de l'élément pour chaque composante du problème. $[K_{rhe}^e]$ et $[K_{geo}^e]$ représentent les matrices de rigidité pour le terme rhéologique et géométrique de l'équation 7.31.

$$\begin{aligned} [K_{rhe}^e] &= \int_{\Omega_{par}} [B]^T [T]^T [C^n] [B] [T] J^{x\xi} d\Omega_{par} \\ [K_{geo}^e] &= \int_{\Omega_{par}} [B]^T [T]^T [\sigma^n] [B] [T] J^{x\xi} d\Omega_{par} \end{aligned}$$

$[K_{int}^{e,-+}]$ et $[K_{int}^{e,++}]$ représentent la contribution de la matrice de rigidité due aux forces d'interfaces t^- et t^+ sur la lèvre supérieure.

$$[K_{int}^{e,-+}] = \int_{\Lambda_{par}^+} [N^T] [\mathcal{S}] [N] A^{x\xi} d\Lambda_{par}^+ \quad [K_{int}^{e,++}] = \int_{\Lambda_{par}^+} [N^T] [\mathcal{S}] [N] A^{x\xi} d\Lambda_{par}^+$$

$[K_{int}^{e,+ -}]$ et $[K_{int}^{e,--}]$ représentent la contribution de la matrice de rigidité due aux forces d'interfaces t^+ et t^- sur la lèvre inférieure.

$$[K_{int}^{e,+ -}] = \int_{\Lambda_{par}^+} [N^T] [\mathcal{S}] [N] A^{x\xi} d\Lambda_{par}^+ \quad [K_{int}^{e,--}] = \int_{\Lambda_{par}^+} [N^T] [\mathcal{S}] [N] A^{x\xi} d\Lambda_{par}^+$$

Après avoir calculé la matrice tangente et le résiduel pour tous les éléments du domaine, une opération d'assemblage permet d'arriver à un système linéaire du type :

$$\mathcal{K}_{ij} U_j = F_i \quad (7.48)$$

La solution de l'équation 7.48 permet de connaître les déplacements nodaux pour chaque pas de temps. Le système linéaire est résolu avec un solveur standard.

7.6 Échelle microscopique : Solution numérique du problème fluide

La cellule caractérisant l'échelle micro est composée par des grains imperméables élastiques et par des interfaces cohésives. En appliquant des conditions aux limites sur le bord de la cellule en terme de déplacement, les grains tendent à se déformer et les interfaces à s'ouvrir ou à se fermer. De cette façon il est possible d'identifier dans la micro-structure un réseau de canaux représenté par les ouvertures normales des interfaces.

Le problème au niveau micro présente un couplage entre la solution mécanique et la solution fluide puisque la masse fluide est calculée à partir des ouverture normales des interfaces mais, au même temps, l'ouverture est à son tour dépendante par les forces d'interface (paragraphe 7.4.2) et par les valeurs de la pression d'eau sur chaque interface.

Le profil de pression d'eau de chaque canal fluide est résolu à partir des équations sur la conservation de la masse fluide et sur la conservation de la quantité de mouvement fluide. Des conditions aux limites périodiques en terme d'un gradient de pression macro ∇p_w^{macro} et une valeur de pression moyenne macro p_w^{macro} sont imposées pour démarrer un processus itératif.

Dans ce processus un profil de pression d'eau p_w^j est trouvé à chaque itération jusqu'à ce que la moyenne de p_w^j soit suffisamment proche de la pression macroscopique p_w^{macro} . Dans les sections suivantes on fait l'hypothèse que la connectivité du réseau fluide n'est jamais perdue.

7.6.1 Équations du problème fluide

Pour calculer le profil de pression du réseau fluide nous considérons les équations de bilan de la masse fluide pour chaque canal. Ces équations expriment le principe physique que la masse d'un corps se conserve. Par conséquent un volume V fixé dans l'espace peut accumuler de la matière ou en changer avec l'extérieur mais pas en créer ni en détruire.

Considérons une région V d'un espace tridimensionnel, la conservation de la masse peut s'écrire avec l'équation 7.49,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho v_i n_i dS \quad (7.49)$$

S étant la surface extérieure au volume V et n_i sa normale sortante. L'équation 7.49 peut être facilement adaptée au réseau des canaux fluides en fonction du flux massique ω :

$$\frac{d\omega^i}{ds^i} = 0 \quad (7.50)$$

où s représente la coordonnée le long du canal i . L'équation 7.50 implique que le flux massique est constant le long d'un même canal ; donc sur chaque noeud du réseau fluide le flux massique en entrée doit être égal à celui en sortie (figure 7.9). Le bilan de masse fluide va être reformulé selon l'équation 7.51.

$$\text{noeud } j, \text{ canal } h : \sum_{h=1}^{\text{canaux}} \omega_h^i = 0 \quad (7.51)$$

Une relation constitutive pour le flux massique est définie de la façon suivante :

$$\omega = \rho_w k(s) \left[\frac{dp_w}{ds} \right] \quad (7.52)$$

Pour que la direction du flux massique soit consistante avec le signe du gradient de pression, un signe moins devrait être inclu dans l'équation 7.52 avant la densité de l'eau ρ_w . Ce signe sera introduit dans l'expression de $k(s)$ dont on parlera dans la section 7.6.2. La variable k représente une valeur de conductivité hydraulique k qui caractérise

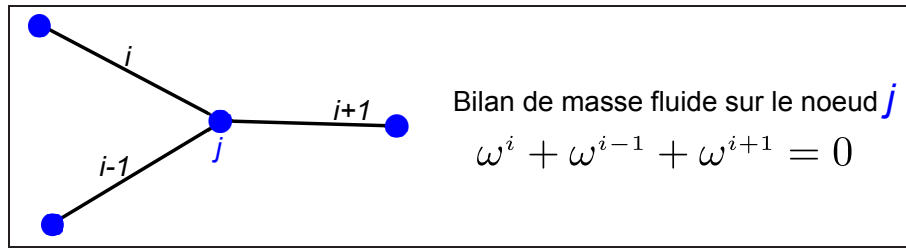


FIGURE 7.9 – Bilan de masse fluide pour le noeud j

tous les canaux. Elle dépend de la viscosité η de l'eau, de l'ouverture normale Δ_i de l'interface cohésive et surtout des hypothèses que nous faisons sur la géométrie du canal (paragraphe 7.6.2). L'eau est traitée comme un fluide compressible dont le comportement est décrit par la loi incrémentale 7.53.

$$\dot{\rho}_w = \frac{\rho_w}{k_w} \dot{p}_w \quad (7.53)$$

Après une opération d'intégration on obtient l'équation suivante :

$$\rho_w = \rho_{w0} \left[\exp \left(\frac{p_w(s) - p_{w0}}{k_w} \right) \right] \quad (7.54)$$

Substituant l'équation 7.54 dans l'équation 7.52 nous obtenons l'expression 7.55 pour le flux massique.

$$\omega = \rho_{w0} \left[\exp \left(\frac{p_w(s) - p_{w0}}{k_w} \right) \right] k(s) \frac{dp_w(s)}{ds} \quad (7.55)$$

En utilisant l'équation 7.55 et l'hypothèse de conservation de la masse fluide (équation 7.50), nous intégrons par séparation des variables et nous obtenons une expression du flux massique ω entre deux extrémités s^j et s^{j-1} du canal étudié.

$$\begin{aligned} \omega \int_{s^{j-1}}^{s^j} \frac{1}{k(s)} ds &= \rho_{w0} \exp\left(\frac{-p_{w0}}{k_w}\right) \int_{s^{j-1}}^{s^j} \exp\left[\frac{p_w(s)}{k_w}\right] dp = \\ &= \rho_{w0} k_w \exp\left(\frac{-p_{w0}}{k_w}\right) \left[\exp\left(\frac{p_w(s^j)}{k_w}\right) - \exp\left(\frac{p_w(s^{j-1})}{k_w}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{\rho_{w0} k_w \left[\exp\left(\frac{p_w(s^j)}{k_w}\right) - \exp\left(\frac{p_w(s^{j-1})}{k_w}\right) \right]}{\exp\left(\frac{p_{w0}}{k_w}\right) \int_{s^{j-1}}^{s^j} \frac{1}{k(s)} ds} \quad (7.56)$$

Afin de simplifier les équations du système fluide et de pouvoir résoudre un système linéaire on introduit les grandeurs suivantes :

$$\phi^i = \frac{k_w \rho_{w0}}{\exp\left(\frac{p_{w0}}{k_w}\right) \int_{s^{j-1}}^{s^j} \frac{1}{k(s)} ds} \quad \lambda_i = \exp\left[\frac{p_w(s)}{k_w}\right]$$

L'équation concernant le flux massique peut être réécrite comme suit :

$$\omega^i = \phi^i (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \quad (7.57)$$

L'indice supérieur i représente l'élément d'interface, les indices inférieurs j et $j-1$ représentent les noeuds à la fin et au début de l'élément d'interface.

En appliquant l'équation 7.57 à l'équation de continuité 7.51 pour chaque noeud du réseau fluide nous obtenons un système linéaire dont l'inconnue est λ (équation 7.58) à partir de laquelle nous arrivons à trouver le profil de pression d'eau p_w du réseau fluide de la microstructure.

$$P_{kl} \lambda_l = 0 \quad (7.58)$$

Il est nécessaire de remarquer que l'équation 7.57 semble être mal conditionné si le paramètre k_w est caractérisé par une valeur très élevée puisque si $k_w \rightarrow \infty$, $\phi^i \rightarrow \infty$ et $\lambda_j \rightarrow 0$. Cela signifie que le système 7.58 ne peut pas être résolu pour un fluide très peu compressible. Afin de résoudre le problème fluide avec un fluide incompressible, les équations suivantes doivent être prise en compte :

$$\omega = \rho_{w0} k(s) \left[\frac{dp_w}{ds} \right] \quad (7.59)$$

$$\omega \int_{s^{j-1}}^{s^j} \frac{1}{k(s)} ds = \rho_{w_0} \int_{s^{j-1}}^{s^j} dp_w = \rho_{w_0} (p_{w_j} - p_{w_{j-1}}) \quad (7.60)$$

$$\omega = \rho_{w_0} \frac{(p_{w_j} - p_{w_{j-1}})}{\int_{s^{j-1}}^{s^j} \frac{1}{k(s)} ds} \quad (7.61)$$

Ce qui amène à résoudre le système linéaire 7.57 en envisageant pour ϕ^i et λ_i les équations suivantes :

$$\phi^i = \frac{\rho_{w_0}}{\int_{s^{j-1}}^{s^j} \frac{1}{k(s)} ds} \quad \lambda_j = p_{w_j}$$

Le problème d'incompressibilité ne semble pas se présenter en envisageant comme fluide l'eau ($k_w = 2.2 * 10^3$ MPa) comm'il a été fait dans les calculs à l'échelle macroscopique qui seront montrer dans le chapitre 8.

7.6.2 Caractérisation des interfaces fluides

La loi de comportement utilisée pour décrire le flux massique montre une perméabilité locale k propre à notre représentation microscopique. Ce paramètre k représente une *conductivité hydraulique* qui caractérise les interfaces du réseau fluide de la microstructure.

Afin d'avoir une expression analytique du terme k et des forces visqueuses tangentielles t_w à appliquer sur les extrémités supérieures et inférieures des interfaces, il est nécessaire de penser un modèle d'écoulement fluide. Dans la suite deux modèles d'écoulement sont envisagés :

- Écoulement fluide entre deux plans infinis parallèles
- Écoulement fluide dans une conduite circulaire

Les équations de Navier-Stokes 7.62¹ sont résolues pour ces deux géométries.

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p_w}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho_w} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (7.62)$$

F_i représente les efforts volumiques s'exerçant sur le fluide. Les approximations suivantes sont envisagées pour résoudre les équations de Navier-Stokes :

- Les efforts volumiques sont négligés dans l'équation 7.62¹ donc nous considérons que $F_i \approx 0$.

- Un écoulement permanent est considéré dans une configuration quasi-statique ($\partial v_i / \partial t \approx 0$).
- Afin de simplifier ultérieurement le problème, le fluide est considéré incompressible donc l'équation 7.62² est ajoutée aux équations de Navier-Stokes.
- L'écoulement est dans un régime laminaire.

Il est nécessaire de remarquer que les solutions aux problèmes d'écoulement vont être calculées en faisant l'hypothèse d'incompressibilité du fluide. Cette hypothèse semble être en contradiction avec l'hypothèse de compressibilité utilisée pour arriver au système linéaire de l'équation 7.58.

La raison pour laquelle nous la considérons satisfaisante est qu'elle nous donne une formulation analytique claire et simple de la caractérisation hydraulique du problème fluide qui peut être vue comme une donnée constitutive du problème fluide.

Écoulement entre deux plans parallèles

En considérant que l'écoulement entre deux plans parallèles est un écoulement plan ($v_2 = 0, v_3 = 0$), la seule composante du champ de vitesse v_1 pour la symétrie du problème dépend uniquement de la variable spatiale x_2 ; les équations de Navier-Stokes sont donc réécrites selon l'équation 7.63.a.

$$\eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_1(x_2 = 0) = 0 \\ v_1(x_2 = h) = 0 \end{cases} \quad (7.63)$$

En intégrant l'équation différentielle 7.63.a avec les conditions aux limites 7.63.b, une solution exacte est obtenue, celle-ci conduit à un profil de vitesse parabolique entre les deux plans séparés de h (équation 7.64).

$$v_1(x_2) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} x_2 (x_2 - h) \quad (7.64)$$

Le flux volumique peut donc s'écrire comme suit :

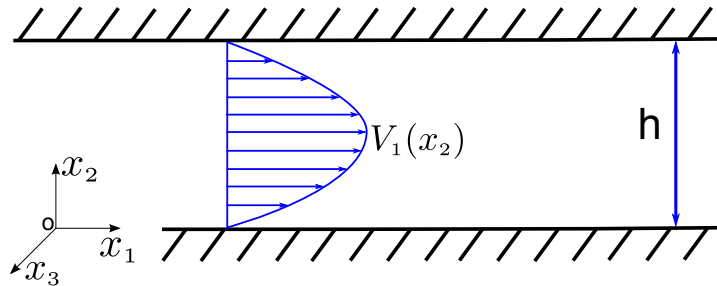


FIGURE 7.10 – Profil du champ de vitesse dans deux plans parallèles

$$Q_1 = \int_0^h v_1(x_2) dx_2 = \int_0^h \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} x_2 (x_2 - h) dx_2 = \left(-\frac{h^3}{12\eta} \right) \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \quad (7.65)$$

Pour finir nous utilisons l'analogie entre le flux volumétrique et le flux massique pour déterminer une expression de la conductivité hydraulique $k(s)$ en envisageant que l'espace entre les deux plans parallèles h correspond à l'ouverture normale des interfaces Δ_n :

$$Q_1 = \frac{\omega}{\rho_w} = k(s) \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k(s) = -\frac{h^3}{12\eta} = -\frac{\Delta_n^3}{12\eta}} \quad (7.66)$$

Puisque le fluide est visqueux une distribution d'efforts tangentiels sera calculée à l'intérieur du canal et sur les deux plans horizontaux :

$$t_w = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_w}{\partial x_1} x_2 \quad \begin{cases} t_w^+ = t_w (x_2 = +h/2) \\ t_w^- = t_w (x_2 = -h/2) \end{cases}$$

Les efforts transmis par le fluide sur les parois du canal sont calculés comme suit :

$$\boxed{t_w^+ = \frac{1}{2} \frac{\partial p_w}{\partial x_2} h = \frac{1}{2} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \Delta_n} \quad \boxed{t_w^- = -\frac{1}{2} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} h = -\frac{1}{2} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \Delta_n} \quad (7.67)$$

Écoulement dans une conduite circulaire

Nous considérons dans la suite le cas d'un écoulement dans une conduite circulaire. Cette géométrie est caractérisée par une symétrie axiale donc la seule composante du flux sera celle le long de x_1 . L'équation 7.68 représente l'équation de Navier-Stokes pour le cas d'une conduite circulaire.

$$\begin{cases} -\frac{\partial p_w}{\partial x_1} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \right] = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p_w}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{\partial p_w}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_1(r=0) \neq \infty \\ v_1(r=R) = 0 \end{cases} \quad (7.68)$$

En intégrant ce système d'équations différentielles nous obtenons le champ de vitesses dans la conduite :

$$v_1(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} (r^2 - R^2) \quad (7.69)$$

$$Q_1 = \int_0^R v_1(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} (r^2 - R^2) 2\pi r dr = -\frac{\pi}{8\eta} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} R^4 \quad (7.70)$$

En faisant l'analogie avec le flux volumétrique et en envisageant que $R = D/2$, nous arrivons à une expression de la conductivité hydraulique $k(s)$:

$$Q_1 = \frac{\omega}{\rho_w} = k(s) \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k(s) = -\frac{\pi R^4}{8\eta} = -\frac{\pi}{8\eta} \left(\frac{D}{2} \right)^4 = -\frac{\pi}{\eta} \frac{\Delta_n^4}{128}} \quad (7.71)$$

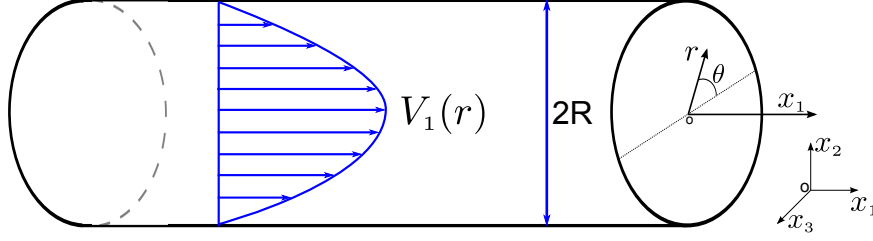


FIGURE 7.11 – Profil du champ de vitesse dans une conduite

Nous remarquons que pour ce modèle d'écoulement fluide nous avons égalé le diamètre de la conduite D à l'ouverture des interfaces Δ_n . À partir du champ de vitesses on calcule la distribution de l'effort tangentiel τ_w :

$$\tau_w = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \eta \frac{\partial v_1}{\partial r} = \frac{1}{4} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} r$$

$$t_w(r) = \int_0^r \tau_w(r) \pi r dr = \frac{\pi}{8} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} r^2 \quad \begin{cases} t_w^+ = +t_w(r = R) \\ t_w^- = -t_w(r = R) \end{cases} \quad (7.72)$$

$$\boxed{t_w^+ = \frac{\pi}{8} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} R^2 = \frac{\pi}{8} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \Delta_n^2} \quad \boxed{t_w^- = -\frac{\pi}{8} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} R^2 = -\frac{\pi}{8} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \Delta_n^2} \quad (7.73)$$

Les équations 7.71, 7.73.a et 7.73.b représentent respectivement la conductivité hydraulique et les forces visqueuses sur les deux côtés opposés de l'interface. Ces quantités sont calculées en faisant l'hypothèse que sur une longueur unitaire le long du plan (O, x_2, x_3) il existe un nombre de canaux égale à $n_{can.}$. De cette façon les équations 7.71, 7.73.a et 7.73.b se peuvent récrire comme suit :

$$k(s) = - \left[\frac{\pi}{\eta} \frac{\Delta_n^4}{128} \right] n_{can.}$$

$$t_w^+ = \left[\frac{\pi}{8} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \Delta_n^2 \right] n_{can.} \quad t_w^- = - \left[\frac{\pi}{8} \frac{\partial p_w}{\partial x_1} \Delta_n^2 \right] n_{can.}$$

De cette façon le paramètre $n_{can.}$ représente un paramètre qui caractérise l'écoulement fluide de la microstructure.

Dans la littérature, il existe très peu de travaux expérimentaux qui ont pour objectif celui de caractériser l'écoulement d'un fluide au travers d'une fissure. Wang et al. [151] et Aldea et al. [2] ont proposé une relation expérimentale entre la perméabilité et un état de fissuration dans un échantillon de béton. Cependant cette relation est basée sur des propriétés résiduelles, ce qui rend la caractérisation de la fissure incertaine. Plus récemment, Dal Pont [49] et Rastiello [120] ont proposé un protocole expérimental permettant de relier au même instant l'état de fissuration et l'écoulement du fluide. Le protocole est composé en deux phases :

- Des échantillons cylindriques de $110mm/160mm/250mm$ de diamètre et $50mm/90mm / 130mm$ d'épaisseur sont soumis à un essai brésilien modifié [25] qui permet de générer une fissure unique dans l'échantillon. L'ouverture de fissure est mesurée au travers des LVDTs et à l'aide d'une technique de corrélation d'image (DIC : digital image corrélation). Cette technique permet de relier l'ouverture de fissure diamétrale mesurée via les LVDTs à la surface de la fissure pour des ouvertures allant jusqu'à $300\mu m$.
- Dans une deuxième phase, l'essai brésilien est couplé à un système hydraulique qui permet d'appliquer un gradient de pression aux deux faces de l'échantillon et de mesurer le débit traversant éprouvette. L'utilisation des LVDTs permet à la fois de connaître à tout instant l'état de fissuration de l'échantillon et d'imposer des ouvertures par palier. La relation ouverture diamétrale-surface de la fissure obtenue dans la première phase du protocole, permet enfin de corrélérer en temps réel l'écoulement du fluide à la surface de la fissure (surface de percolation).

La relation ainsi obtenue permet de corriger la loi d'écoulement de Poiseuille (loi d'écoulement dans une conduite circulaire) et de l'adapter à la morphologie d'une fissure réelle (avec donc la prise en compte de la tortuosité, la rugosité ...). La correction est particulièrement importante pour de petites ouvertures ($< 100\mu m$).

Comportement hydraulique des interfaces fermées

En utilisant deux différents modèles d'écoulement nous arrivons à deux estimations de la conductivité locale du modèle microscopique (équations 7.66 et 7.71). Implicitement nous avons fait également l'hypothèse que la dimension transversale du modèle d'écoulement soit égale à l'ouverture normale entre les grains du VER ($h \equiv \Delta_n$ or $D \equiv \Delta_n$).

Une telle hypothèse peut conduire à des problèmes si les interfaces se ferment ($\Delta_n = 0$) puisque le système 7.58 résultera singulière étant ϕ^i nul. De cette façon le système d'équations 7.57 ne peut pas être résolu.

Une première solution pourrait être d'éliminer du système fluide P_{ij} toutes les lignes concernant les noeuds des interfaces fermées (Frey [68], [69]). Cette façon de résoudre le problème implique que les deux surfaces des interfaces soient infiniment régulières et lisses, ce qui ne semble pas très réaliste.

Une approche plus réaliste et qui évite la singularité du système linéaire fluide est de caractériser l'irrégularité de la surface des grains et de considérer deux systèmes d'ouvertures normales Δ_n :

- Un système d'ouvertures mécaniques identifié par les ouvertures Δ_n avec lequel les forces cohésives sont calculées.
- Un système d'ouvertures hydrauliques Δ_{fluide} caractérisé par une valeur minimale

de l'ouverture et en même temps dépendant des ouvertures mécaniques (équation 7.74).

De cette façon même si l'interface est fermée à cause d'un comportement de compression, elle ne se ferme jamais complètement à cause de sa rugosité donc l'eau pourra toujours couler grâce à cette valeur minimale de l'ouverture. Le paramètre Δ_{min} représente donc un paramètre constitutif du modèle hydraulique choisi.

$$\Delta_{fluide} = \begin{cases} \Delta_n + \Delta_{min} & \forall \Delta_n \geq 0 \\ \Delta_{min} & \forall \Delta_n < 0 \end{cases} \quad (7.74)$$

Cette procédure nous permet d'éviter de réarranger la matrice du système linéaire P_{ij} puisque les interfaces ne sont jamais complètement fermées et donc toutes les composantes ϕ^i sont toujours différentes de zéro ($k(s) \neq 0$).

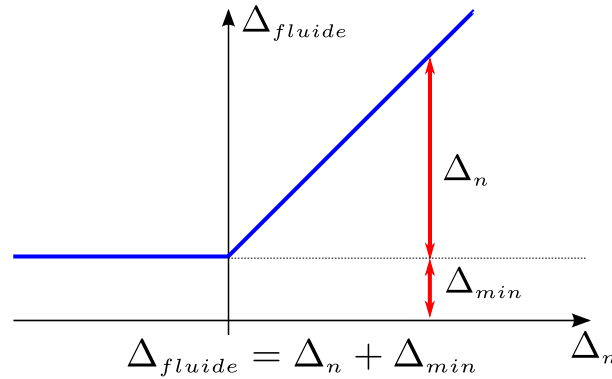


FIGURE 7.12 – Ouverture du réseau fluide en fonction des ouvertures mécaniques

La figure 7.13 schématise la physique d'une interface caractérisée par une surface rugueuse. À cause de cet aspect elle est modélisée par un milieu équivalent dont le comportement est donné par l'équation 7.74.

La fonction de conductivité locale pour un modèle d'écoulement entre deux plans parallèles et pour un modèle d'écoulement composé par n_{can} conduites circulaires sur une longueur unitaire de l'interface (équations 7.75.a et 7.75.b) :

$$k(s) = -\frac{(\Delta_n + \Delta_{min})^3}{12\eta} \quad k(s) = -\frac{\pi (\Delta_n + \Delta_{min})^4}{\eta 128} n_{can} \quad (7.75)$$

7.6.3 Description numérique du problème couplé

Pour calculer le profil de pression dans le réseau fluide un processus itératif est appliqué. Ce processus est démarré en envisageant la configuration mécanique fixée,

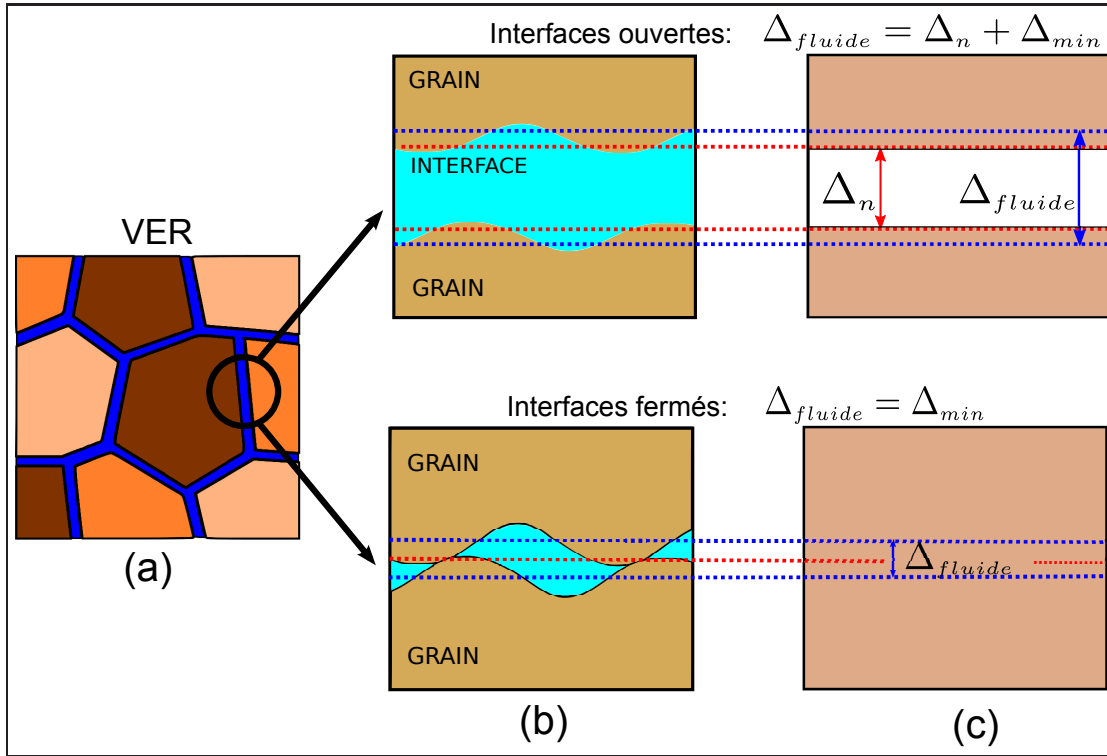


FIGURE 7.13 – a) Microstructure du problème, b) Schématisation de la physique de l'interface, c) Modélisation de l'interface

c'est-à-dire que les itérations du problème fluide utilisent une configuration des ouvertures des interfaces Δ_n constante pendant le processus itératif du problème fluide.

Comme le problème fluide est résolu et les forces d'interface sont connues (forces visqueuses tangentielles t_w , forces normales dues à la pression d'eau p_w) une autre itération du problème mécanique est démarrée sur un pas de temps à partir duquel on calcule une nouvelle distribution des ouvertures normales Δ_n . Quand les deux problèmes, celui concernant la mécanique et celui concernant le fluide, sont arrivés à convergence un nouveau pas de temps est démarré.

Pour présenter l'algorithme de résolution sur la partie fluide nous considérons la microstructure de la figure 7.14 où le réseau fluide est discrétisé. Cette microstructure est composée par 3 grains (un grain central, deux moitiés à côté de celui du centre et deux quarts de grains en haut et en bas), 24 intersections auxquelles les pressions fluides p_w sont calculées et 24 éléments d'interfaces où les flux massiques sont calculés.

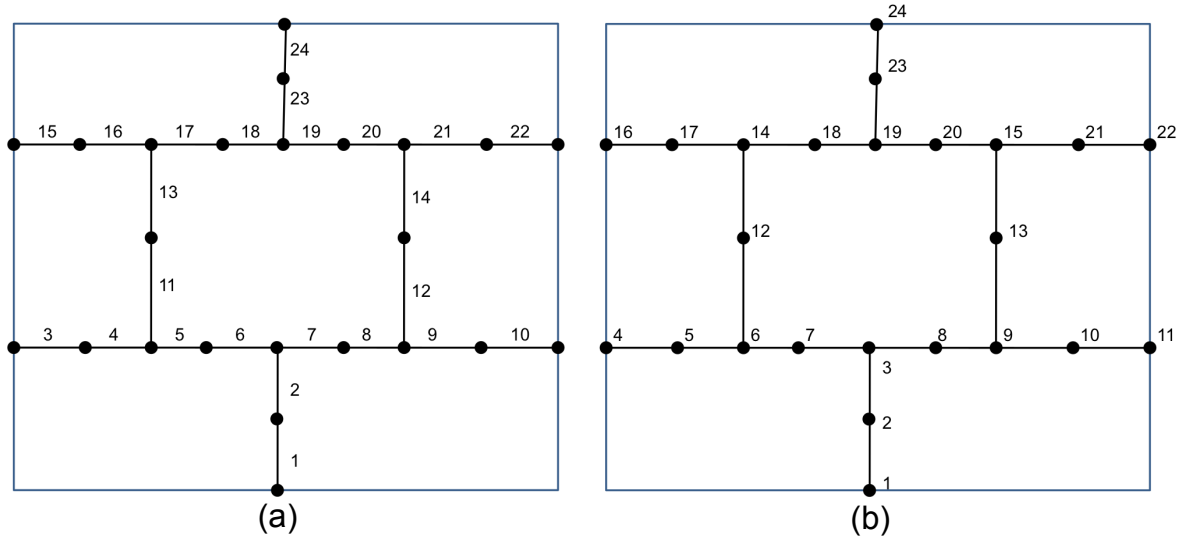


FIGURE 7.14 – a) Numérotation des interfaces fluides, b) Numérotation des noeuds fluides

Assemblage du système fluide

Le VER comporte 18 intersections, dont 6 à trois branches et 12 à deux branches. La conservation du flux (équations 7.51 et 7.57) est écrite aux 18 noeuds internes comme suit :

$$\phi^i = \frac{k_w \rho_{w0}}{\exp\left(\frac{p_{w0}}{k_w}\right) \int_{s^{j-1}}^{s^j} \frac{1}{k(s)} ds} \quad \lambda_j = \exp\left[\frac{p_w(s^j)}{k_w}\right]$$

$$\omega^i = \phi^i (\lambda_j - \lambda_{j-1}) \quad \sum_{h=1}^{canaux} \omega_h^i = 0$$

En faisant reference à la microstructure de figure 7.14 les équations de bilan de masse fluide sur chaque nœud peuvent être écrites dans la façon suivante :

2. $\omega^1 + \omega^2 = 0$	$\phi^1 (\lambda_2 - \lambda_1) + \phi^2 (\lambda_2 - \lambda_3) = 0$
3. $\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 = 0$	$\phi^2 (\lambda_3 - \lambda_2) + \phi^6 (\lambda_3 - \lambda_7) + \phi^7 (\lambda_3 - \lambda_8) = 0$
5. $\omega^3 + \omega^4 = 0$	$\phi^3 (\lambda_5 - \lambda_4) + \phi^4 (\lambda_5 - \lambda_6) = 0$
6. $\omega^4 + \omega^5 + \omega^{11} = 0$	$\phi^4 (\lambda_6 - \lambda_5) + \phi^5 (\lambda_6 - \lambda_7) + \phi^{11} (\lambda_6 - \lambda_{12}) = 0$
7. $\omega^5 + \omega^6 = 0$	$\phi^5 (\lambda_7 - \lambda_6) + \phi^6 (\lambda_7 - \lambda_3) = 0$
8. $\omega^7 + \omega^8 = 0$	$\phi^7 (\lambda_8 - \lambda_3) + \phi^8 (\lambda_8 - \lambda_9) = 0$
9. $\omega^8 + \omega^9 + \omega^{12} = 0$	$\phi^8 (\lambda_9 - \lambda_8) + \phi^9 (\lambda_9 - \lambda_{10}) + \phi^{12} (\lambda_9 - \lambda_{13}) = 0$

$$\begin{array}{ll}
10. & \omega^9 + \omega^{10} = 0 & \phi^9 (\lambda_{10} - \lambda_9) + \phi^{10} (\lambda_{10} - \lambda_{11}) = 0 \\
12. & \omega^{11} + \omega^{13} = 0 & \phi^{11} (\lambda_{12} - \lambda_6) + \phi^{13} (\lambda_{12} - \lambda_{14}) = 0 \\
13. & \omega^{12} + \omega^{14} = 0 & \phi^{12} (\lambda_{13} - \lambda_9) + \phi^{14} (\lambda_{13} - \lambda_{15}) = 0 \\
14. & \omega^{13} + \omega^{16} + \omega^{17} = 0 & \phi^{13} (\lambda_{14} - \lambda_{12}) + \phi^{16} (\lambda_{14} - \lambda_{17}) + \phi^{17} (\lambda_{14} - \lambda_{18}) = 0 \\
15. & \omega^{14} + \omega^{20} + \omega^{21} = 0 & \phi^{14} (\lambda_{15} - \lambda_{13}) + \phi^{20} (\lambda_{15} - \lambda_{20}) + \phi^{21} (\lambda_{15} - \lambda_{21}) = 0 \\
17. & \omega^{15} + \omega^{16} = 0 & \phi^{15} (\lambda_{17} - \lambda_{16}) + \phi^{16} (\lambda_{17} - \lambda_{14}) = 0 \\
18. & \omega^{17} + \omega^{18} = 0 & \phi^{17} (\lambda_{18} - \lambda_{14}) + \phi^{18} (\lambda_{18} - \lambda_{19}) = 0 \\
19. & \omega^{18} + \omega^{19} + \omega^{23} = 0 & \phi^{18} (\lambda_{19} - \lambda_{18}) + \phi^{19} (\lambda_{19} - \lambda_{20}) + \phi^{23} (\lambda_{19} - \lambda_{23}) = 0 \\
20. & \omega^{19} + \omega^{20} = 0 & \phi^{19} (\lambda_{20} - \lambda_{19}) + \phi^{20} (\lambda_{20} - \lambda_{15}) = 0 \\
21. & \omega^{21} + \omega^{22} = 0 & \phi^{21} (\lambda_{21} - \lambda_{15}) + \phi^{22} (\lambda_{21} - \lambda_{22}) = 0 \\
23. & \omega^{23} + \omega^{24} = 0 & \phi^{23} (\lambda_{23} - \lambda_{19}) + \phi^{24} (\lambda_{23} - \lambda_{24}) = 0
\end{array}$$

Conditions aux limites périodiques : Conservation du flux

Des conditions aux limites périodiques en terme de conservation du flux sont imposés sur les noeuds de la frontière en bas (noeuds 1) et à gauche (noeuds 4, 16). Ces conditions sont présentées ci-dessus.

$$\begin{array}{ll}
1. & \omega^1 + \omega^{24} = 0 & \phi^1 (\lambda_1 - \lambda_2) + \phi^{24} (\lambda_{24} - \lambda_{23}) = 0 \\
4. & \omega^3 + \omega^{10} = 0 & \phi^3 (\lambda_4 - \lambda_5) + \phi^{10} (\lambda_{11} - \lambda_{10}) = 0 \\
16. & \omega^{15} + \omega^{22} = 0 & \phi^{15} (\lambda_{16} - \lambda_{17}) + \phi^{22} (\lambda_{22} - \lambda_{21}) = 0
\end{array}$$

Conditions aux limites périodiques : Gradient de pression

Une différence de pression est appliquée entre les noeuds opposés en utilisant le gradient de pression macro ($\nabla p_{w_i} = (\Delta p^{macro} / \Delta X_i)$, avec $\Delta X_i = 1$) :

$$\begin{aligned}
p_{w_j} - p_{w_{j-1}} &= \Delta p_w^{macro} & \exp\left(\frac{p_{w_j}}{k_w} - \frac{p_{w_{j-1}}}{k_w}\right) &= \exp\left(\frac{\Delta p_w^{macro}}{k_w}\right) \\
\frac{\exp\left(\frac{p_{w_j}}{k_w}\right)}{\exp\left(\frac{p_{w_{j-1}}}{k_w}\right)} &= \exp\left(\frac{1}{k_w} \Delta p_w^{macro}\right) & \frac{\exp\left(\frac{p_{w_j}}{k_w}\right)}{\exp\left(\frac{p_{w_{j-1}}}{k_w}\right)} &= \exp\left(\frac{\Delta p_w^{macro}}{k_w}\right) \\
\exp\left(\frac{p_{w_j}}{k_w}\right) - \left[\exp\left(\frac{\Delta p_w^{macro}}{k_w}\right) \exp\left(\frac{p_{w_{j-1}}}{k_w}\right) \right] &= 0 \\
\lambda_j - \left[\exp\left(\frac{\Delta p_w^{macro}}{k_w}\right) \right] \lambda_j &= 0
\end{aligned}$$

$$\lambda_j - (\delta p_w) \lambda_{j-1} = 0 \qquad \delta p = \exp \left(\frac{\Delta p^{macro}}{k_w} \right)$$

Par convention nous choisissons un gradient positif pour un fluide circulant horizontalement de droite à gauche, et verticalement de haut en bas. En tenant compte de la numérotation utilisée nous écrivons :

$$p_{w_j} - p_{w_{j-1}} > 0$$

Les différences des pressions imposées aux intersections 11, 22 et 24 peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} 11. \quad & \lambda_{11} - \left[\exp \left(\frac{\Delta p_w^{macro}}{k_w} \right) \right] \lambda_4 = 0 \\ 22. \quad & \lambda_{22} - \left[\exp \left(\frac{\Delta p_w^{macro}}{k_w} \right) \right] \lambda_{16} = 0 \\ 24. \quad & \lambda_{24} - \left[\exp \left(\frac{\Delta p_w^{macro}}{k_w} \right) \right] \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$

Un exemple de la matrice P_{ij} décrivant la conservation du flux massique pour un système périodique est proposée dans les figures 7.15 et 7.16.

Pression moyenne

Le système fluide se compose de 24 équations : 21 équations de conservations du flux (3 équations définies comme conditions aux bords et 18 équations définies sur les noeuds à l'intérieur) et 3 équations où une différence de pression est imposée aux frontières.

Ce système est singulier, il présente une infinité de profils de pression à une constante prêt. Pour résoudre ce problème une des 21 équations de conservation du flux doit être remplacée par une valeur donnée de pression moyenne P_w^{av} . En choisissant de remplacer l'équation de conservation du flux massique au point 2 par la pression moyenne P_w^{av} nous obtenons :

$$\begin{aligned} p_{w_2} = P_w^{av} \quad \implies \quad \frac{p_{w_2}}{k_w} = \frac{P_w^{av}}{k_w} \quad \implies \quad \exp \left(\frac{p_{w_2}}{k_w} \right) = \exp \left(\frac{P_w^{av}}{k_w} \right) \\ \lambda_2 = \exp \left(\frac{P_w^{av}}{k_w} \right) \end{aligned} \tag{7.76}$$

De cette manière le système algébrique représentant les équations de continuité sera bien posé et présentera une solution unique. Après avoir trouvé les inconnues du problème fluide λ_i , nous pouvons arriver à calculer le profil de pression comme suit :

$$p_{w_i} = k_w \log (\lambda_i) \tag{7.77}$$

Algorithme de résolution du système fluide

La description explicite du réseau fluide est résolue distinctement du problème mécanique par un processus itératif afin de trouver un profil de pression qui respecte les conditions aux limites et qui ait en même temps une valeur moyenne du champ de pression égale à la pression macroscopique P^{macro}_w .

Une façon alternative de résoudre le système fluide sans démarrer un calcul itératif est d'imposer directement l'équation correspondante à la pression moyenne dans le système fluide :

$$\left(\frac{1}{\Omega_{fluide}}\right) \sum p_{w_j} = P^{macro}_w \quad (7.78)$$

Cette procédure directe de résolution du système fluide est moins performante par rapport à celle où un processus itératif est démarrée puisque les termes de l'équation 7.78 ne sont pas regroupés autour de la diagonale de la matrice P_{ij} . De plus pour exprimer l'équation 7.78 avec des exponentielles on perd aussi la linéarité de l'équation 7.78 ce qui complique encore plus la solution numérique du problème. Le processus itératif de résolution du problème hydraulique atteint une solution avec deux ou trois itérations qui semble être suffisamment performant.

Pour ces raisons le processus itératif décrit dans le tableau 7.2 à été pris en compte. Le problème mécanique et le problème fluide sont résolus séparément, donc les ouvertures Δ_n peuvent être considérées comme une donnée fixée utilisée pour intégrer la fonction $k(s)$ et calculer les composantes ϕ^i du système fluide.

La première itération est démarrée en substituant l'équation de continuité du flux massique sur le noeud 2 avec l'équation 7.76 où la valeur de la pression moyenne P^{av}_w est égale à la pression macro P^{macro}_w . En résolvant le système fluide nous arrivons à calculer un profil de pression p_{w_i} dont nous évaluons le valeur moyenne P^{av}_w . La valeur de la pression moyenne P^{av}_w est comparée avec la pression d'eau macroscopique P^{macro}_w de la façon suivante :

$$\Delta p_w = P^{macro}_w - P^{av}_w \quad (7.79)$$

Si Δp_w n'est pas suffisamment petit on réactualise la pression au noeud 2 (équation 7.80) afin d'initialiser de nouveau la matrice du système fluide P_{ij} et démarrer une itération de plus.

$$p_{w_2} = p_{w_2} + \Delta p_w \quad (7.80)$$

Lorsque le profil de pression p_{w_i} aura une valeur moyenne P^{av}_w suffisamment proche de la pression d'eau macroscopique P^{macro}_w nous pouvons considérer ce profil de pression comme celui qui reçoit le problème fluide.

ϕ^1	$-\phi^1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\phi^1$	$\phi^1 + \phi^2$	$-\phi^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\phi^2$	$\phi^2 + \phi^6 + \phi^7$	0	0	0	$-\phi^6$	$-\phi^7$	0	0	0	0
0	0	0	ϕ^3	$-\phi^3$	0	0	0	0	$-\phi^{10}$	ϕ^{10}	0
0	0	0	$-\phi^3$	$\phi^3 + \phi^4$	$-\phi^4$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-\phi^4$	$\phi^4 + \phi^5 + \phi^{11}$	$-\phi^5$	0	0	0	0	$-\phi^{11}$
0	0	$-\phi^6$	0	0	$-\phi^5$	$\phi^5 + \phi^6$	0	0	0	0	0
0	0	$-\phi^7$	0	0	0	0	$\phi^7 + \phi^8$	$-\phi^8$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$-\phi^8$	$\phi^8 + \phi^9 + \phi^{12}$	$-\phi^9$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$-\phi^9$	$\phi^9 + \phi^{10}$	$-\phi^{10}$	0
0	0	0	$-\delta p$	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	$-\phi^{11}$	0	0	0	0	0	$\phi^{11} + \phi^{13}$
0	0	0	0	0	0	0	0	ϕ^{12}	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\phi^{13}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\delta p$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

 FIGURE 7.15 – Côté gauche de la matrice P_{ij}

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\phi^{24}$	ϕ^{24}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\phi^{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\phi^{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\phi^{12} + \phi^{14}$	0	$-\phi^{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$\phi^{18} + \phi^{19} + \phi^{23}$	0	0	$-\phi^{16}$	$-\phi^{17}$	0	0	0	0	0	0	0
$-\phi^{14}$	0	$\phi^{14} + \phi^{20} + \phi^{21}$	0	0	0	0	$-\phi^{20}$	$-\phi^{21}$	0	0	0	0
0	0	0	ϕ^{15}	$-\phi^{15}$	0	0	0	$-\phi^{22}$	ϕ^{22}	0	0	0
0	$-\phi^{16}$	0	$-\phi^{15}$	$\phi^{15} + \phi^{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-\phi^{17}$	0	0	0	$\phi^{17} + \phi^{18}$	$-\phi^{18}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$-\phi^{18}$	$\phi^{13} + \phi^{16} + \phi^{17}$	$-\phi^{19}$	0	0	$-\phi^{23}$	0	0
0	0	$-\phi^{20}$	0	0	0	$-\phi^{19}$	$\phi^{19} + \phi^{20}$	0	0	0	0	0
0	0	$-\phi^{21}$	0	0	0	0	0	$\phi^{21} + \phi^{22}$	$-\phi^{22}$	0	0	0
0	0	0	δp	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$-\phi^{23}$	0	0	0	$\phi^{23} + \phi^{24}$	$-\phi^{24}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

 FIGURE 7.16 – Côté droit de la matrice P_{ij}

- Champs des ouvertures normales Δ_n^i du problème mécanique à l'itération i .

1. CONDUCTIVITÉ LOCALE

- Calcul de la surface totale des interfaces Ω^{fluide}
- Calcul des paramètres $k(s)$, pour chaque interface fluide.
- Calcul des $\int \frac{1}{k(s)} ds$ pour chaque interface fluide.

2. INITIALISATION

- Initialisation de la pression moyenne : $p_{w_2} = P_w^{macro}$
- Initialisation du numéro d'itération : $NITER^{fluide} = 1$
- Calcul des termes ϕ_i pour chaque interface.

3. ASSEMBLAGE

- Assemblage de la matrice P_{ij} à partir des équations de continuité
- Assemblage de la matrice P_{ij} avec des conditions aux limites périodiques
- Imposition d'une valeur de pression moyenne $P_w^{av.}$ dans le profil de la matrice P_{ij} .

4. ITERATION FLUIDE

(a) *Assemblage :*

- a.1 $Si NITER^{fluide} = 1 \implies$ GO TO (b)
- a.2 $Si NITER^{fluide} > 1 \implies$ mise à jour de C avec p_{w_2}

(b) *Calcul du champ de pressions p_{w_i}*

(c) *Calcul du gradient de pressions $\partial p_{w_i} / \partial s_i$ et des efforts tangentiels t_{w_i}*

(d) *Calcul de la pression moyenne $P_w^{av} = \sum p_{w_i} / \Omega^{fluide}$*

(e) *Calcul de la différence de pressions : $\Delta p_w = P_w^{macro} - P_w^{av.}$*

(f) *Mise à jour de la pression moyenne : $p_{w_2} = p_{w_2} + \Delta p_w$*

(g) *Test de convergence :*

- $Si \Delta p_w \leq \text{toll.} \implies$ GO TO 5.
- $Si \Delta p_w > \text{toll.} \implies NITER^{fluide} = NITER^{fluide} + 1, \text{ GO TO 4.a}$

5. POURSUITE DU CALCUL MÉCANIQUE

TABLE 7.2 – Algorithme de résolution du système fluide

7.7 Grandeurs macroscopiques homogénéisées

Une fois que le problème sur la microstructure est intégré sur un pas de temps Δt des grandeurs macroscopiques peuvent être calculées. Ce sont :

- La contrainte homogénéisée ou contrainte du mélange : σ_{ij}^{mix}
- La densité homogénéisée ou densité du mélange : ρ^{mix}
- La variation de la masse fluide : \dot{M}_w
- Le flux massique du mélange dans la direction x_1 et x_2 : m_1^{mix}, m_2^{mix}

Ces grandeurs caractérisent le comportement du milieu homogène équivalent qui est pris en compte pour décrire une loi de comportement à partir d'une échelle d'observation microscopique.

La contrainte du mélange σ_{ij}^{mix} est exprimée comme moyenne des contraintes solides σ_{ij}^s et de la pression d'eau p_w sur le volume des parties solides Ω^s et fluides Ω^f de la microstructure :

$$\sigma_{ij}^{mix} = \frac{1}{\Omega} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^s d\Omega^s + \int_{\Omega^w} p_w \delta_{ij} d\Omega^w \right) \quad (7.81)$$

Avec $\Omega = \Omega^s + \Omega^w$ le volume total. Il est possible de montrer (Caillerie [30]) que l'opération de moyenne sur la contrainte peut être substituée avec une formule qui dépend seulement des contraintes sur le bord de la cellule (annexe C.2).

La densité du mélange ρ^w se calcule comme la somme de la masse solide M^s et de la masse fluide M^w divisée par le volume total de la cellule. Étant la masse du squelette solide constante, elle peut être calculée à partir de la configuration non déformée.

$$\rho^{mix} = \frac{M^s + M^w}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \left(\rho_0^s \Omega_0^s + \int_{\Omega^w} \rho^w d\Omega^w \right) \quad (7.82)$$

La quantité de masse fluide M_w représente la masse fluide présente dans le réseau des canaux fluides à un instant t , elle est calculée par intégration de la masse fluide volumique sur le volume des fissures Ω^f représentant le domaine fluide du problème. Le volume fluide est donc calculé à partir de Δ_f pour tenir compte de la quantité de masse fluide présente entre les aspérités des fissures. Une fois que le profil de pression est connu, la quantité de masse fluide peut être définie selon l'équation 7.83.a.

La dérivée de la quantité de masse fluide est définie numériquement comme le rapport incrémental entre un incrément de masse fluide et la taille du pas de temps (équation 7.83.b).

$$M_w = \int_{\Omega^w} \rho_w d\Omega^w \quad \dot{M}_w = \frac{M_w^t - M_w^{t+\Delta t}}{\Delta t} \quad (7.83)$$

Le flux massique du mélange m_i^{mix} est évalué comme la somme des flux sur les noeuds du bord de la microstructure :

$$m_x^{mix} = \sum_{j=1}^A m_{x_j} \quad m_y^{mix} = \sum_{k=1}^B m_{y_k}$$

Avec B le numéro des noeuds qui appartient au bord de droite $\partial\Omega_B$ et C ceux du bord en haut $\partial\Omega_C$. En prenant le réseau fluide décrit en figure 7.14.b le flux massique peut être calculé comme suit :

$$m_x^{mix} = m_x^{11} + m_x^{22} \quad m_y^{mix} = m_y^{24}$$

7.7.1 Implémentation des éléments finis à l'échelle micro

L'algorithme de résolution du problème aux éléments finis à l'échelle microscopique est montré dans le tableau 7.3.

Dans un problème aux conditions aux limites à l'échelle macroscopique, le gradient des déplacements macro ∇u_{ij}^{macro} , la pression d'eau macro P_w^{macro} et le gradient de pression d'eau $\nabla P_{w_i}^{macro}$ ne seront plus lus à partir d'un fichier des données. Ils feront partie de la cinématique avec laquelle nous calculerons la loi de comportement pour le problème mécanique et hydraulique à l'échelle macroscopique. Ces détails seront présentés dans le chapitre 8.1.

1. LECTURE DES DONNÉES

- (a) Lecture des coordonnées des noeuds
- (b) Lecture des propriétés mécaniques pour chacun des grains et des interfaces
- (c) Lecture des conditions aux limites :
 - Gradient des déplacements macro ∇u_{ij}^{macro}
 - Pression d'eau macro P_w^{macro}
 - Gradient de pression d'eau $\nabla P_{w_i}^{macro}$

2. INITIALISATION

- (a) Numérotation des degrés de liberté : Algorithme de Cuthill-McKee, [48].
- (b) Calcul des angles d'inclinaison α_i de chaque interface cohésive pour le calcul de la matrice de changement de repère R_{ij} (équations 7.41.a)

Suite du calcul dans la page suivante \Rightarrow

\Rightarrow Continuation de l'algorithme de la page précédente.

3. BOUCLE SUR LES PAS DE TEMPS N

- (a) Applications des conditions aux limites en déplacement sur les coins de la microstructure (équations 7.8, 7.9 et 7.10)
- (b) Initialisations de la matrice de rigidité avec les conditions périodiques (la différence des déplacements entre les deux bords horizontaux et les deux bords verticaux doit être constante, équations 7.6 et 7.7)
- (c) Calcul des ouvertures Δ_i^{local} des interfaces dans le repère local à partir des déplacement nodales dans le repère global (équation 7.41.b¹)
- (d) Solution du système fluide : calcul des forces tangentiels t_w et normales p_w selon l'algorithme montré dans le tableau 7.2.
- (e) Calcul des forces d'interface dans le repère locale t_i^{local} et passage au repère global (équation 7.41.b²)
- (f) Calcul de la matrice global K_{ij} et des forces nodales F_i pour les éléments de chaque composante de la microstructure (grains et interfaces cohésives).
- (g) ALGORITHME DE NEWTON-RAPHSON
 - i. *Solution du système algébrique linéaire.*
 - ii. *Mis-à-jour des coordonnées nodales*
 - iii. *Calcul des ouvertures Δ_i^{local} des interfaces dans le repère local à partir des déplacement nodales dans le repère global (équation 7.41.b¹)*
 - iv. *Solution du système fluide : calcul des forces tangentiels t_w et normales p_w selon l'algorithme montré dans le tableau 7.2*
 - v. *Calcul des forces d'interface dans le repère locale t_i^{local} et passage au repère global (équation 7.41.b²)*
 - vi. *Calcul de la matrice global K_{ij} et des forces nodales F_i pour les éléments de chaque composante de la microstructure (grains et interfaces cohésives).*
 - vii. *Calcul du paramètre de convergence r^{force} et test de convergence :*
 - A. if $r^{force} > toll \Rightarrow$ GO TO 3.g.i
 - B. if $r^{force} < toll \Rightarrow$ GO TO 3 avec $N = N+1$
- (h) Mis-à-jour des variables d'état

TABLE 7.3 – Algorithme de résolution du problème aux éléments finis sur la microstructure

Chapitre 8

Résultats numériques

8.1 Introduction

Ce chapitre a comme objectif de présenter le comportement du milieu homogénéisé à l'échelle macroscopique. Les calculs que nous allons présenter ont été faits à la fois pour un problème en mécanique pur et pour un problème couplé.

Comme il a été remarqué dans la section 2.4.3, le tenseur tangente consistante à l'échelle macroscopique est calculé avec une méthode de perturbation qui nous oblige, pour chaque pas de temps, d'intégrer la lois de comportement fem^2 , cinq fois en total pour un problème en mécanique pure, huit fois pour un problème en hydromécanique.

À la différence des lois de comportements phénoménologiques ou expérimentales (section 2.3.2), la méthode de l'homogénéisation définit le comportement du point matériel en moyennant la contrainte de la microstructure que représentera le VER du matériau. Dans le cas d'un problème couplé, une approche phénoménologique nécessite des hypothèses sur le milieu poreux envisagé, elles nous permet de développer analytiquement les termes de couplage de la matrice tangente du problème linéarisé (figure 2.6 de la section 2.4.3).

Pour une approche d'homogénéisation numérique aucun développement analytique est possible, tous les termes de la matrice tangente du système linéarisée sont donc calculés (equation 8.1).

$$\begin{aligned} d\sigma_{il}^{\tau^1} &= E_{ilkj} \frac{\partial du_k^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} + A_{il} dp_w^{\tau^1} + B_{ilj} \frac{\partial dp_w^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} \\ \rho^{mix, \tau^1} &= D_{ij} d \frac{\partial du_i^{\tau^1}}{\partial x_j^{\tau^1}} + E dp_w^{\tau^1} + G_k \frac{\partial dp_w^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \\ dm_i^{\tau^1} &= A_{ijk} \frac{\partial du_j^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} + L_i dp_w^{\tau^1} + J_{ik} \frac{\partial dp_w^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \\ d\dot{M}^{\tau^1} &= K_{jk} \frac{\partial du_j^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} + I dp_w^{\tau^1} + Q_k \frac{\partial dp_w^{\tau^1}}{\partial x_k^{\tau^1}} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Une expression matricielle de l'équation 8.1 est montrée en figure 8.1. D'une manière générale les termes de la matrice tangente sont non nuls néanmoins, selon le problème aux limites étudié, il est possible que certains termes s'annulent.

$E1_{11}^{\tau 1}$	$E1_{12}^{\tau 1}$	$E1_{13}^{\tau 1}$	$E1_{14}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM_{11}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{12}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{13}}^{\tau 1}$
$E1_{21}^{\tau 1}$	$E1_{22}^{\tau 1}$	$E1_{23}^{\tau 1}$	$E1_{24}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM_{21}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{22}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{23}}^{\tau 1}$
$E1_{31}^{\tau 1}$	$E1_{32}^{\tau 1}$	$E1_{33}^{\tau 1}$	$E1_{34}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM_{31}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{32}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{33}}^{\tau 1}$
$E1_{41}^{\tau 1}$	$E1_{42}^{\tau 1}$	$E1_{43}^{\tau 1}$	$E1_{44}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WM_{41}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{42}}^{\tau 1}$	$K_{WM_{43}}^{\tau 1}$
$G1_{11}^{\tau 1}$	$G1_{12}^{\tau 1}$	$G1_{13}^{\tau 1}$	$G1_{14}^{\tau 1}$	0	0	$G2_{11}^{\tau 1}$	$G2_{12}^{\tau 1}$	$G2_{13}^{\tau 1}$
$G1_{21}^{\tau 1}$	$G1_{22}^{\tau 1}$	$G1_{23}^{\tau 1}$	$G1_{24}^{\tau 1}$	0	0	$G2_{21}^{\tau 1}$	$G2_{22}^{\tau 1}$	$G2_{23}^{\tau 1}$
$K_{MW_{11}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{12}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{13}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{14}}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WW_{11}}^{\tau 1}$	$K_{WW_{12}}^{\tau 1}$	$K_{WW_{13}}^{\tau 1}$
$K_{MW_{21}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{22}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{23}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{24}}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WW_{21}}^{\tau 1}$	$K_{WW_{22}}^{\tau 1}$	$K_{WW_{23}}^{\tau 1}$
$K_{MW_{31}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{32}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{33}}^{\tau 1}$	$K_{MW_{34}}^{\tau 1}$	0	0	$K_{WW_{31}}^{\tau 1}$	$K_{WW_{32}}^{\tau 1}$	$K_{WW_{33}}^{\tau 1}$

FIGURE 8.1 – Bloc bleu ciel de la matrice tangente $[E_{(x,y)}^{\tau 1}]_{ij}$

Dans la suite de cette section nous proposons la résolution de quelques problèmes aux limites pour la validation de l'implémentation du problème sur la microstructure dans le code aux éléments finis Lagamine. Afin d'observer la solution du problème à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique, des scripts dans le langage Python ont été développés. Ils nous permettent d'observer l'état des interfaces cohésives pour chaque pas, chaque élément et chaque point de Gauss, mais aussi l'état de chaque interface cohésive en substituant à chaque point de Gauss macroscopique la solution du problème à l'échelle microscopique. De cette façon il est possible d'avoir une idée générale du comportement macroscopique en regardant l'état de chaque microstructure.

La solution numérique d'un problème à deux échelles est schématisée dans le tableau 8.1. L'algorithme de solution du problème à l'échelle microscopique (section 7.7.1) pour un milieu périodique est appliqué chaque fois qu'il est nécessaire d'intégrer la loi de comportement pendant un algorithme de Newton-Raphson.

1. **Solution du problème à l'échelle macroscopique** pour le pas n au temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.
2. Algorithme de Newton-Raphson : itération i
3. Boucle sur tous les éléments
 - (a) Boucle sur tous les points de Gauss de chaque élément
 - i. Choix de la loi de comportement.
 - ii. Loi de comportement FEM² : homogénéisation numérique.
Mis à jour des variables d'état pour démarrer le pas $n+1$ à partir de l'état du pas précédent. Celles-ci sont :
 - Coordonnées nodales x_i de la microstructure au pas n .
 - Ouvertures maximales normalisées λ^{max} au pas n .
 - iii. Boucle sur le numéro des perturbations nécessaires pour calculer numériquement le tenseur tangent : 5 en mécanique pure, 8 en hydromécanique.
 - A. **Solution du problème à l'échelle microscopique**
Adaptation de l'algorithme du tableau 7.3 pour un problème à deux échelles. Intégration du problème aux éléments finis en utilisant la cinématique du problème macro pour imposer les conditions aux limites sur la microstructure. Calcul des grandeurs homogénéisées (section 7.7).
 - B. Calcul du tenseur tangent avec une méthode de perturbation.
4. Assemblage de la matrice de rigidité globale.
5. Solution du système algébrique linéaire, calcul de $\delta\Delta u_i$ et mise à jour des vitesses nodales.
6. Test sur la convergence.
 - (a) Le critère de convergence n'est pas satisfait : $i=i+1 \implies$ go to 2
 - (b) Le critère de convergence est satisfait :
 - i. Mise à jour des variables d'état qui identifient l'état de la microstructure (coordonnées nodales et ouvertures maximales normalisées). L'état final du pas n va devenir l'état initial du pas $n+1$.
 - ii. $n = n + 1 \implies$ go to 1.

TABLE 8.1 – Algorithme de résolution numérique du problème aux limites à deux échelles.

8.2 Validation du problème en mécanique pure

Pour vérifier numériquement la réponse mécanique d'un milieu dont la loi de comportement est obtenue avec un processus d'homogénéisation numérique, nous considérons trois problèmes aux conditions aux limites :

- Problème de traction isotrope
- Problème de compression isotrope
- Problème de cisaillement pur

Dans chaque problème nous considérons des conditions aux limites en déplacement et un domaine discrétisé par quatre éléments (figure 8.2.a) de façon que la réponse du milieu doive forcément être homogène. La microstructure du problème est décrite en figure 8.2.b. Les résultats en contraintes seront caractérisés par les aspects suivants :

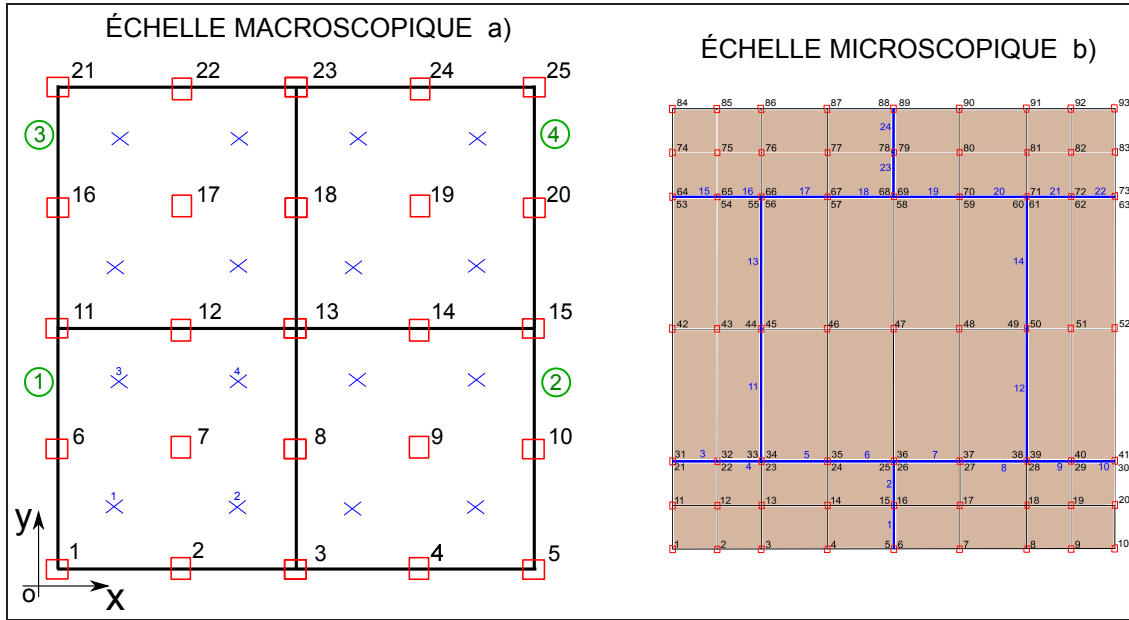


FIGURE 8.2 – Maillage du domaine à l'échelle macroscopique figure a), maillage du domaine à l'échelle microscopique figure b).

- Homogénéité : À cause des conditions aux limites le champ de déformations à l'échelle macroscopique est homogène, par conséquent la réponse en contrainte doit se révéler homogène.
- Linéarité : En considérant des conditions aux limites en déplacement suffisamment petits, nous pouvons assumer que l'état du milieu soit élastique (les interfaces cohésives à l'échelle microscopique ne sont pas endommagées). De cette façon nous comparons l'état de contrainte obtenu par l'homogénéisation numérique σ_{ij}^{FEM2} et l'état de contrainte σ_{ij}^{lin} , cette dernière est calculée avec le tenseur tangent et

avec le champ de déformation obtenus à la fin de chaque pas de temps.

- Résultats FEM^2 et micro : Nous avons comparé la contrainte $\sigma_{ij}^{FEM^2}$ avec la contrainte σ_{ij}^{micro} calculée uniquement avec le code qui résout le problème micro. Pour cela nous avons appliqué sur le calcul micro le même gradient de déformation du calcul macro afin de pouvoir appliquer, dans les deux cas, les mêmes conditions aux limites sur la cellule. De cette façon les résultats peuvent être comparés.
- Convergence : Une étude de convergence est proposée afin de vérifier l'évolution quadratique de la convergence. Dans ce cadre nous avons fait varier le paramètre de perturbation ϵ pour regarder de quelle façon il influence la converge du calcul.

Les paramètres caractérisant les composantes de la microstructure sont montrés dans le tableau 8.2. Afin de décrire le comportement des interfaces de la façon la plus simple possible, les paramètres du comportement tangentiel sont égaux aux paramètres du comportement en traction ($\delta_t = \delta_n$, $T_n^{max} = T_t^{max}$). En utilisant les paramètres λ et μ

Modèle élastique des grains			Modèle des interfaces			Propriétés fluides		
λ	961.0	MPa	δ_n	0.015	mm	ν	10^{-9}	MPa.s
μ	1442.0	MPa	δ_t	0.015	mm	ρ_0	10^{-3}	g/mm ³
ρ	$2.7 * 10^{-3}$	g/mm ³	T_n^{max}	5.0	MPa	p_0	0.1	MPa
			T_t^{max}	5.0	MPa	k_w	$2.2 * 10^3$	MPa

TABLE 8.2 – Paramètres mécaniques et physiques de la microstructure.

du tableau 8.2, il est possible de calculer le module de Young E et le coefficient de Poisson ν utilisant les équations 8.2.b¹ et 8.2.b² ($E=3460.2$ MPa, $\nu = 0.2$).

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{3 \left(\frac{K}{G} \right) - 2}{2 + 6 \left(\frac{K}{G} \right)} \\ E = 3K (1 - 2\nu) \end{array} \right. \quad (8.2)$$

8.2.1 Traction isotrope

Les conditions aux limites pour un problème de traction isotrope sont décrites dans le tableau 8.3. Elles nous permettent d'obtenir, au niveau microscopique, des forces de contact normales à l'interface qui sont uniquement en traction. La réponse en contrainte du mélange pour les composantes $\sigma_{xx}^{fem^2}$, $\sigma_{yy}^{fem^2}$ est montrée dans la figure 8.3. La composante $\sigma_{xy}^{fem^2}$ est nulle $\sigma_{xy}^{fem^2} = 0$ elle n'a donc pas été affichée.

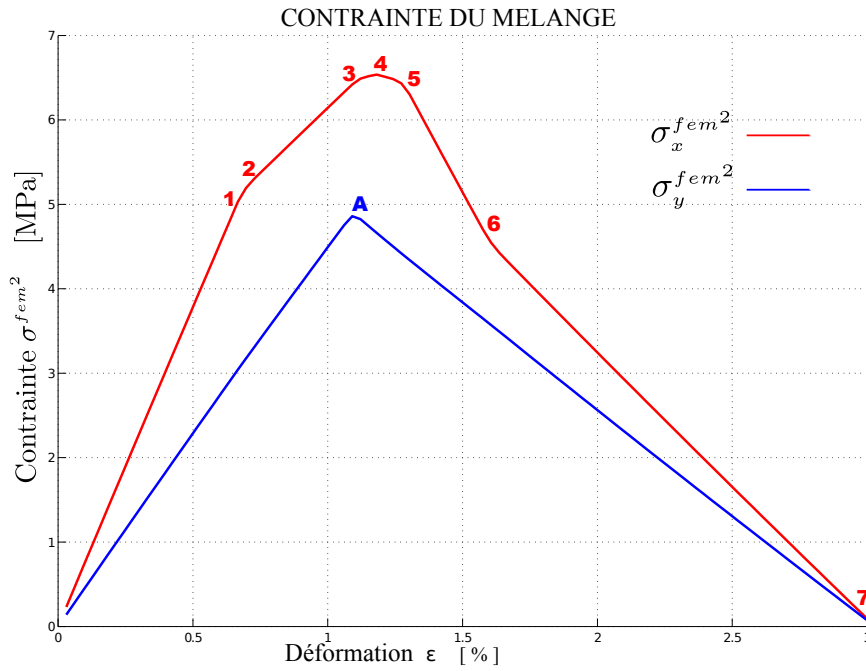
Afin de comprendre l'évolution des contraintes de la figure 8.3, nous regardons les détails du comportement de la microstructure qui est identifié par l'état de chaque force d'interface cohésive (figure 8.4).

La contrainte $\sigma_{xx}^{fem^2}$ est caractérisée par un comportement élastique jusqu'au pas 66 (point 1 de la figure 8.3) puisque le comportement de chaque interface est élastique.

DDL Bloqués	Numéro des nœuds					DDL Imposé	Numéro des nœuds				
Déplacement u_x	1	6	11	16	21	Déplacement u_x	5	10	15	20	25
Déplacement u_y	1	2	3	4	5	Déplacement u_y	21	22	23	24	25

TABLE 8.3 – Conditions au limites du problème : tirage isotrope

Au pas 68 les forces orthogonales des interfaces 1, 2, 23 et 24 (figure 8.2) commencent à être endommagées (point 2 de figure 8.3). Nous retrouvons donc un changement de pente au niveau macroscopique jusqu'au pas 107 (point 3) où ces quatre interfaces d'extrémité sont complètement endommagées.

**FIGURE 8.3** – Contrainte du mélange de la micro-structure : problème de traction isotrope en déplacement

Le point 4 (pas 116) de la courbe montre le pic de la contrainte horizontale $\sigma_{xx}^{fem^2}$ du mélange caractérisé par le dernier état élastique des interfaces verticales 11, 12, 13 et 14 qui commencent à s'endommager au pas 117. À partir de ce moment, l'endommagement augmente de plus en plus avec le chargement et la pente de la courbe rouge en figure 8.3 montre une diminution ultérieure jusqu'au pas 156 (point 6).

Après ce pas, le comportement normal des interfaces du bord supérieur est complètement cassé et toute la résistance de la cellule le long de la direction horizontale est retenue par le comportement normal des interfaces 11, 12, 13 et 14. Puisqu'à ce moment l'ouverture normale de ces interfaces est encore basse, elles peuvent réagir avec des forces considérables d'autant que la courbe globale montre une augmentation de résistance. À l'échelle microscopique, le point 7 de la figure 8.3 est caractérisé par la

rupture de la composante normale de la plupart des interfaces (step 304) et par un fort endommagement des autres.

La contrainte verticale du mélange σ_{yy}^{fem2} montre un comportement élastique jusqu'au pas 107 (point A de figure 8.3), dû au comportement normal de toutes les interfaces horizontales. Après ce pas, elles s'endommagent toutes ensemble jusqu'au pas 304 dans lequel les interfaces 3, 4, 9, 10 et 15, 16, 21, 22 sont complètement cassées.

La composante tangentielle de la contrainte σ_{xy}^{fem2} reste nulle pendant tout le chargement. Ce résultat peut être expliqué en envisageant que, même si les grains sont chargés avec des forces tangentielles sur les interfaces horizontales, la valeur moyenne de la contrainte tangentielle reste nulle étant donné que la distribution des forces tangentielles est parfaitement antisymétrique. Nous remarquons que toutes les interfaces verticales ne présentent aucune force tangentielle puisque les ouvertures tangentielles sont nulles $\Delta_t = 0$.

Ainsi, avec une telle structure, la réponse du mélange se révèle bien anisotrope. Cette anisotropie représente un résultat conséquent à la géométrie de la microstructure. Étant donné qu'un comportement isotrope représente un cas particulier de comportement anisotrope, il est possible de montrer que, dans le cadre de l'homogénéisation, une réponse mécanique isotrope est obtenue seulement avec des structure très régulières (structures symétriques par rapport à un angle de 60°). Nous ajoutons donc qu'il n'est pas possible de caractériser le niveau d'anisotropie à priori, il serait nécessaire de faire une étude paramétrique en changeant des grandeurs caractéristiques de la microstructure prise en compte. En envisageant la microstructure de figure 8.2, on pourrait considérer une étude paramétrique en changeant les dimensions du grain central (différents rapports de la largeur sur l'hauteur) et étudier comment varie la réponse mécanique du milieu homogénéisé en analysant le rapport entre la contrainte horizontale et verticale. Cet aspect représente une perspective possible de ce travail.

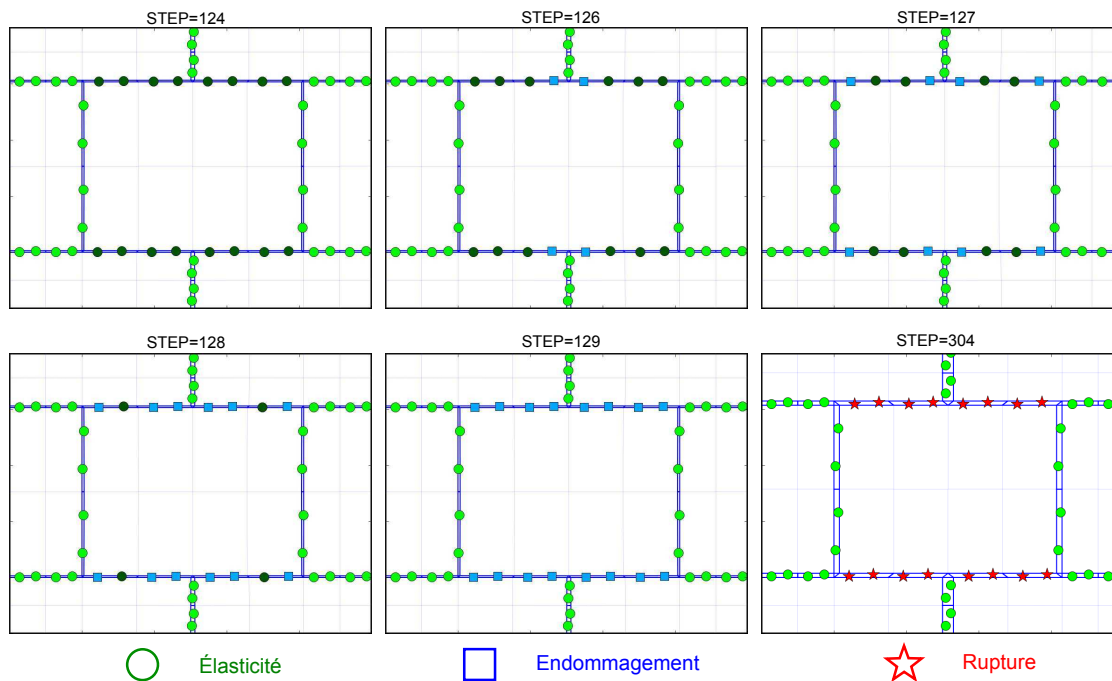
Homogénéité

Pour valider l'implémentation, l'homogénéité de la réponse mécanique a été vérifiée. En raison des conditions aux limites, la cinématique du milieu est homogène ce qui fait que l'état de contrainte doit être homogène. Le tableau 8.4 montre la valeur des contraintes pour chaque point de Gauss de chaque élément pour différents taux de déformations. Ces valeurs sont parfaitement les mêmes sur chaque point du domaine. Nous pouvons donc affirmer que l'état de contrainte du milieu est bien homogène. Nous remarquons que même le tenseur tangent consistant calculé avec une méthode de perturbation est constant dans chaque point de Gauss de chaque élément. La contrainte de cisaillement σ_{xy} se relève nulle pendant tout le chargement et n'est donc pas affichée dans le tableau 8.4.

		ϵ 0.30 %		ϵ 0.60 %		ϵ 1.10 %		ϵ 1.58 %	
[MPa]		σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xx}	σ_{yy}
ELEM 1	IP=1	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=2	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=3	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=4	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
ELEM 2	IP=1	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=2	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=3	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=4	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
ELEM 3	IP=1	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=2	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=3	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=4	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
ELEM 4	IP=1	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=2	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=3	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241
	IP=4	2.2988	1.3903	4.5674	2.7610	6.4478	4.4380	4.6413	3.6241

TABLE 8.4 – État homogène de contrainte : traction isotrope.

COMPORTEMENT TANGENTIEL DES INTERFACES



COMPORTEMENT ORTHOGONAL DES INTERFACES

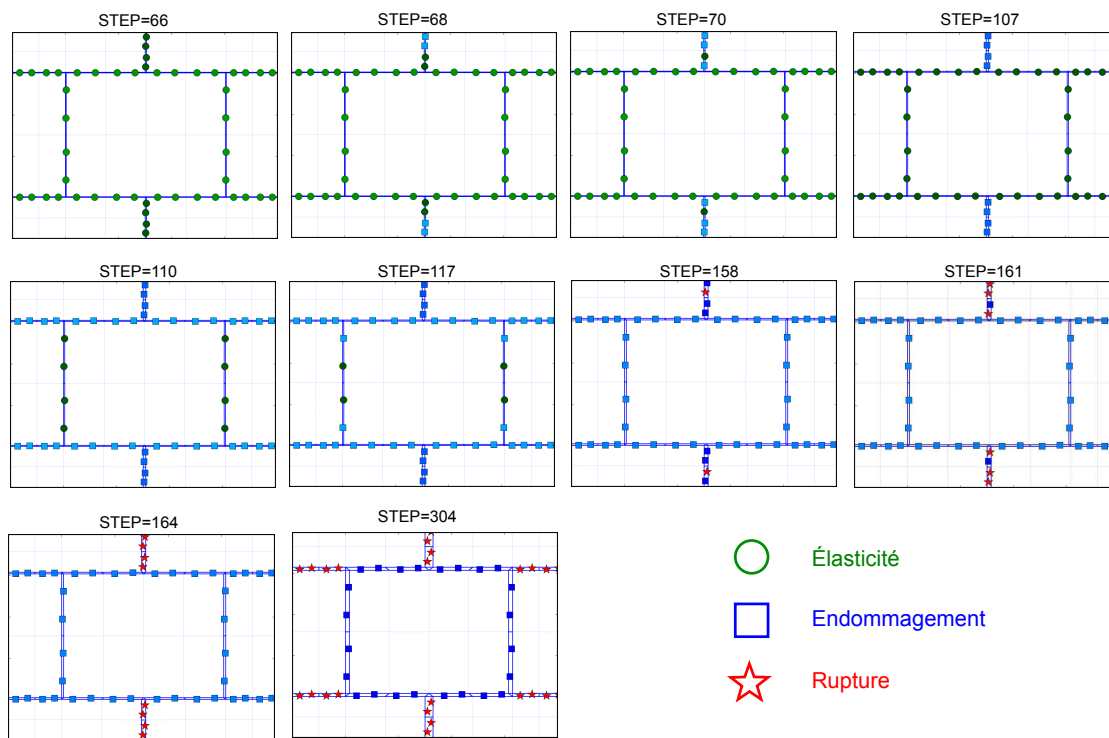
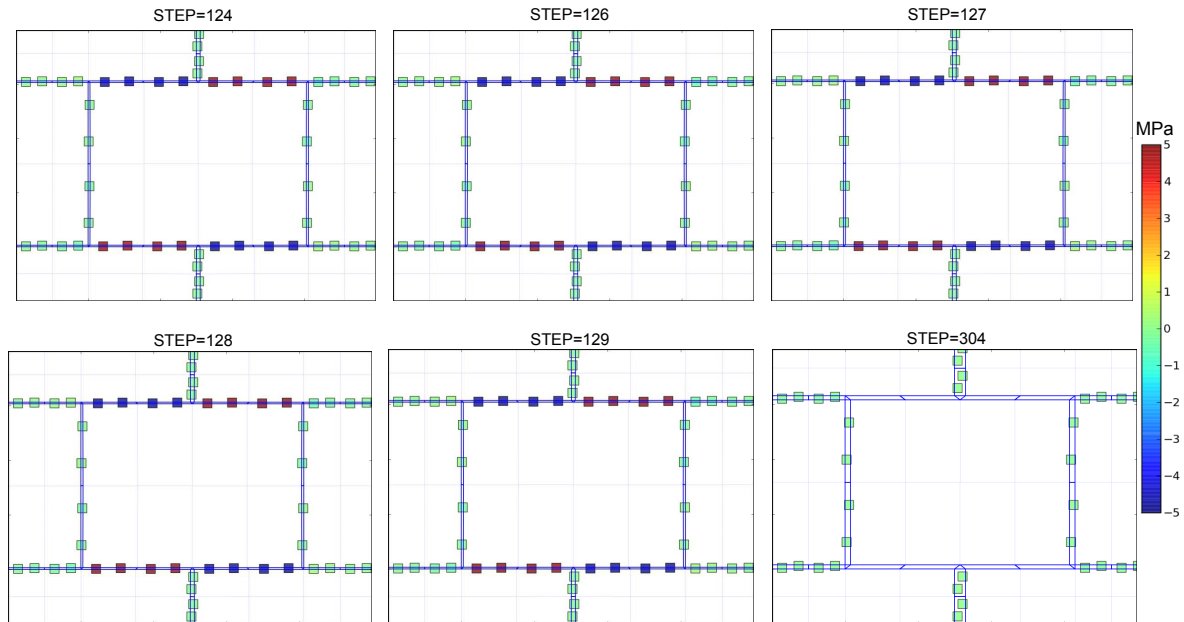


FIGURE 8.4 – Comportement des interfaces de la microstructure : traction isotrope

COMPOURTEMENT TANGENTIEL DES INTERFACES



COMPOURTEMENT ORTHOGONAL DES INTERFACES

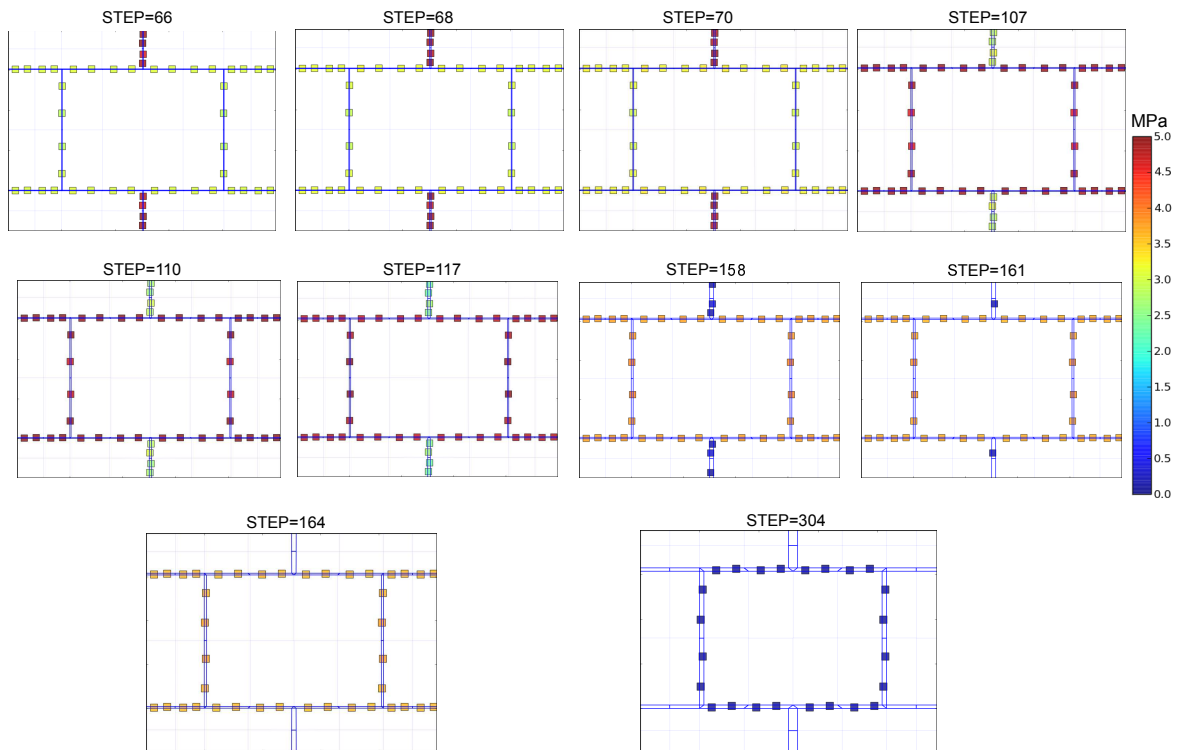


FIGURE 8.5 – Forces des interfaces de la microstructure : traction isotrope

Validation du comportement linéaire

Pour vérifier que l'état de contrainte $\sigma_{ij}^{fem^2}$ atteint des valeurs numériquement correctes nous faisons l'hypothèse de petites déformations et de comportement linéaire. Étant donné que pour un problème élastique la solution est unique, nous allons comparer la contrainte du milieu homogénéisé $\sigma_{ij}^{fem^2}$ avec celle calculée envisageant le tenseur tangent C^{fem^2} . Si le comportement avait été parfaitement linéaire, la contrainte aurait pu se calculer avec l'équation 8.3 :

$$\sigma_i^{lin} = C_{ij}^{fem^2} \varepsilon_j^{fem^2} \quad (8.3)$$

La figure 8.6 montre l'évolution de la contrainte qui vient des éléments finis au carré $\sigma_i^{fem^2}$ et celle calculée avec une hypothèse de comportement élastique linéaire σ_i^{lin} . Les deux courbes sont parfaitement superposées quand le champ de déformations est réellement petit et tendent à s'éloigner vers la fin quand l'hypothèse de grandes déformations commence à jouer un rôle significatif. Le step 66 représente la limite élastique du milieu c'est-à-dire le point 1 de figure 8.4.

Pour estimer la distance entre les deux états de contraintes, nous définissons une fonction d'erreur relative comme suit :

$$err_x = \left[1 - \frac{\sigma_x^{lin}}{\sigma_x^{fem^2}} \right] \quad err_y = \left[1 - \frac{\sigma_y^{lin}}{\sigma_y^{fem^2}} \right] \quad (8.4)$$

La figure 8.7 montre l'évolution des fonctions err_x, err_y . La valeur maximale de l'erreur relative entre les deux contraintes ne dépasse pas le 1.6% ce qui nous permet de considérer σ^{fem^2} comme une valeur calculée correctement.

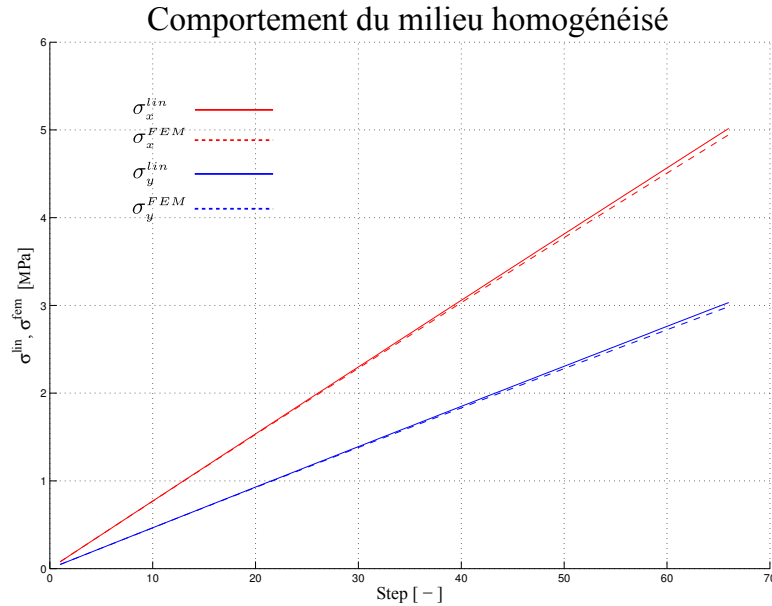


FIGURE 8.6 – Comparaison de l'état de contrainte : comportement linéaire.

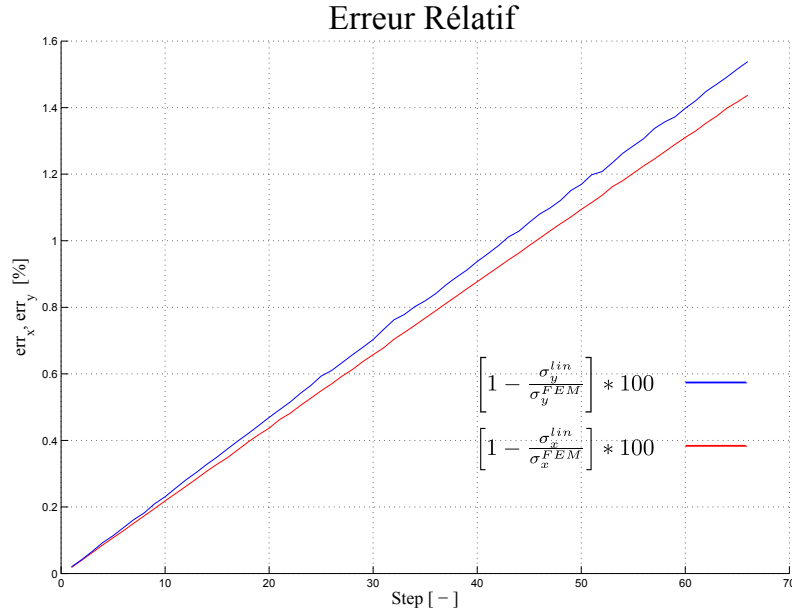
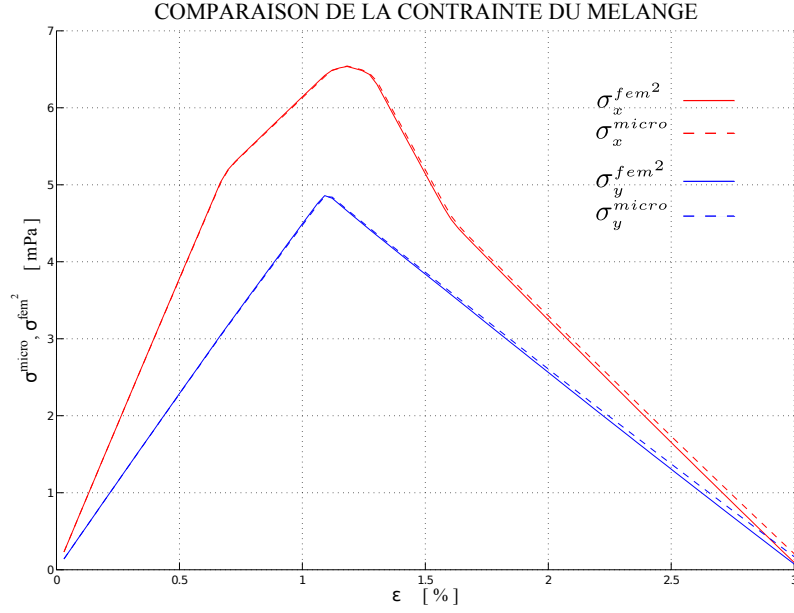


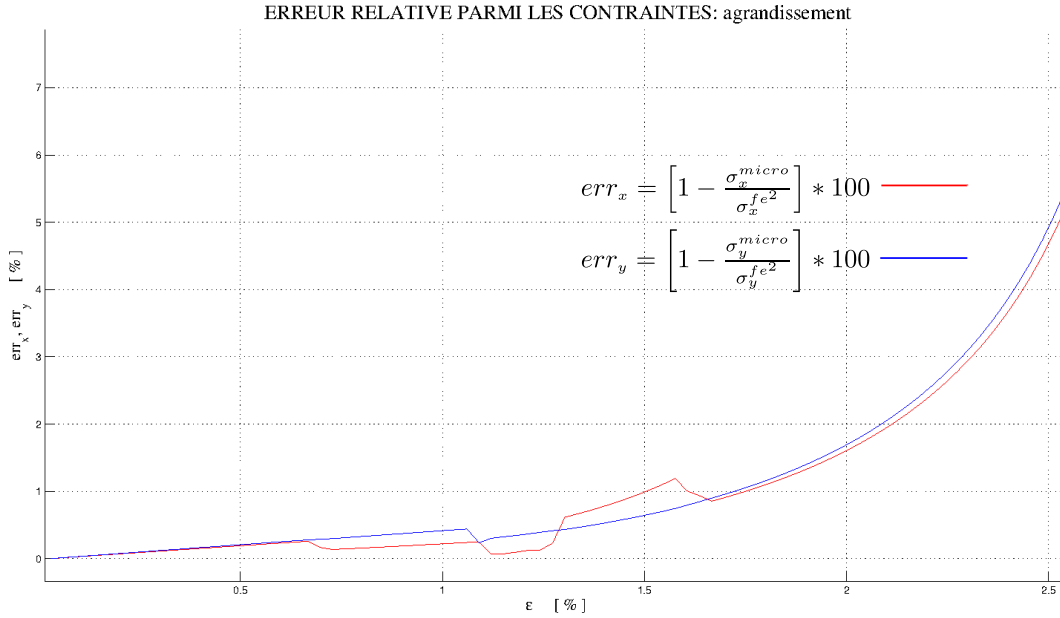
FIGURE 8.7 – Erreur relative sur la contrainte calculée : comportement linéaire.

Comparaison FEM²-micro

Une vérification ultérieure a été de comparer les résultats obtenus avec les éléments finis au carré avec ceux obtenus exclusivement avec le code qui résout le problème micro [68]. Cette comparaison a été possible étant donné que l'état de contrainte à l'échelle macroscopique σ^{fem^2} homogène. Les résultats en contrainte sont montrés dans la figure 8.8.


 FIGURE 8.8 – Solution en contrainte avec FEM^2 et avec le code micro

Les contraintes σ_x, σ_y calculées avec les deux codes sont suffisamment proches pendant toute l'évolution du calcul. Afin de comprendre comment les deux calculs se différencient au fur et à mesure du chargement les paramètres err_x, err_y sont montrés dans l'image 8.9.


 FIGURE 8.9 – Erreur relative entre la solution micro et la solution avec FEM^2

Le tableau 8.5 montre les valeurs de err_x, err_y en fonction du pourcentage de déformations imposées. L'erreur relative entre les deux solutions se révèle au dessous

de 1% jusqu'à un pourcentage de déformations du 1,6% (point 6 de figure 8.3) qui correspond au moment où les premières interfaces commencent à se casser. Après cette valeur, err_x , err_y continuent à augmenter mais de façon exponentielle puisque la valeur des contraintes tendent à zéro. De toute façon, les erreurs relatives à la fin du chargement ne dépassent pas le 6 pour cent.

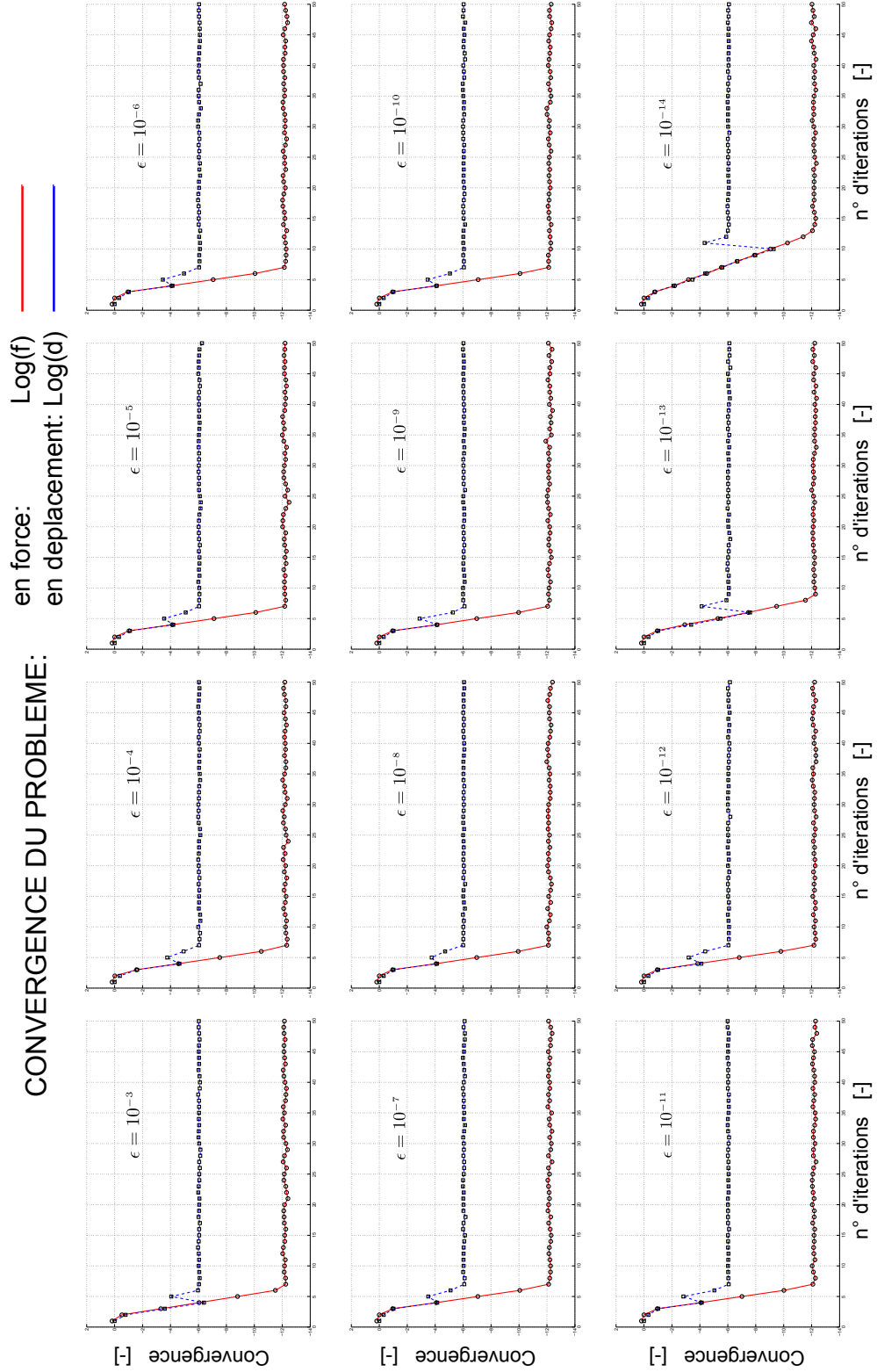
$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$ [%]	err_x [%]	err_y [%]	comportement de la micro-structure
0.66 %	0.27%	0.25%	état élastique des interfaces
1.1 %	0.25%	0.20%	endommagement des interfaces
1.2 %	0.35%	0.15%	endommagement des interfaces
1.6 %	0.80%	1.00%	rupture des interfaces orthogonales
2.0 %	1.60%	1.75%	évolution de la rupture des interfaces
2.5 %	4.90%	4.65%	évolution de la rupture des interfaces

TABLE 8.5 – Erreur relative entre la solution FEM^2 et celle micro

Convergence du problème

Une étude sur l'évolution de la convergence a été faite pour ce problème imposant une déformation de 0,1% avec les conditions aux limites. Un facteur qui peut modifier l'évolution de la convergence est la perturbation avec laquelle nous calculons numériquement le tenseur tangent. Afin de comprendre l'intervalle des valeurs possibles du paramètre ϵ pour laquelle on atteint la solution du problème avec une convergence quadratique, on a résolu le problème du tirage isotrope avec différentes valeurs de la perturbation. Différentes courbes de convergence, chacune d'elles étant une valeur différente de la perturbation, sont montrées dans la figure 8.10. Pour une intervalle compris entre $\epsilon=10E-3$ et $\epsilon=10E-14$ le problème arrive à convergence même si dans le cas de $\epsilon=10E-14$ on perd l'évolution quadratique de la convergence. Pour des valeurs supérieures à $\epsilon=10E-14$ le problème ne converge plus, dans la mesure où la différence entre les contraintes est tellement petite qu'on entre dans le bruit numériques.

Pour ce qui est de la figure 8.10, la convergence en déplacement montre un pic vers la cinquième itération alors que la convergence en force continue vers les valeurs limites qui caractérisent ce problème aux limites. Puisque ces calculs ont été faits considérons un milieu second gradient, nous constatons que ce comportement de la convergence en déplacement est du aux degrés de liberté de la partie second gradient.


 FIGURE 8.10 – Convergence du problème en fonction de la perturbation ϵ

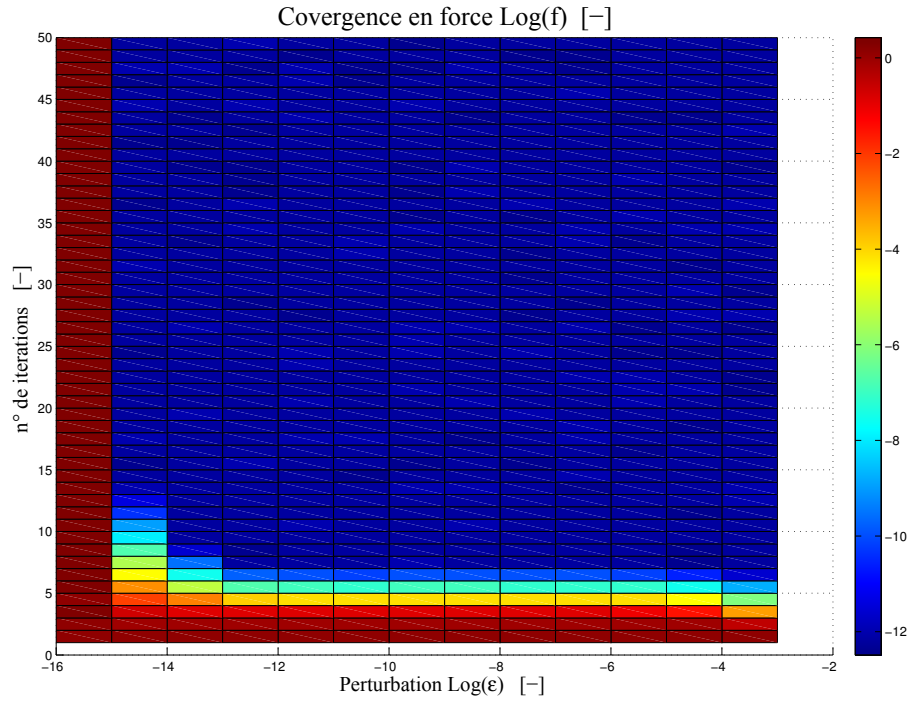


FIGURE 8.11 – Comportement du paramètre de convergence en force

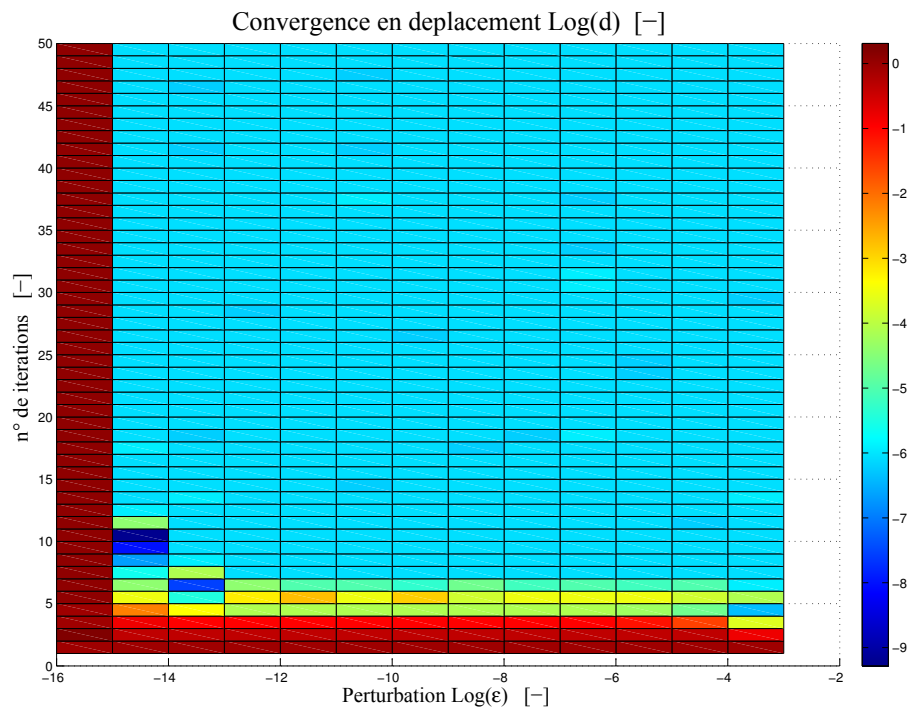


FIGURE 8.12 – Comportement du paramètres de convergence en déplacement

8.2.2 Compression isotrope

En utilisant le domaine mécanique de figure 8.2, nous analysons le comportement du milieu homogénéisé avec des conditions aux limites en compression isotrope. Les déplacements imposés sont les mêmes que ceux de la section 8.2.1 mais de signe opposé. Dans cette partie de validation, deux lois de comportement sont considérées :

- Loi de contact linéaire caractérisée par la même rigidité de la partie en traction.
- Loi de contact non linéaire décrite dans l'équation 7.27.

La figure 8.13 montre l'évolution des contraintes en utilisant les deux lois de comportement pour décrire les contacts entre les grains.

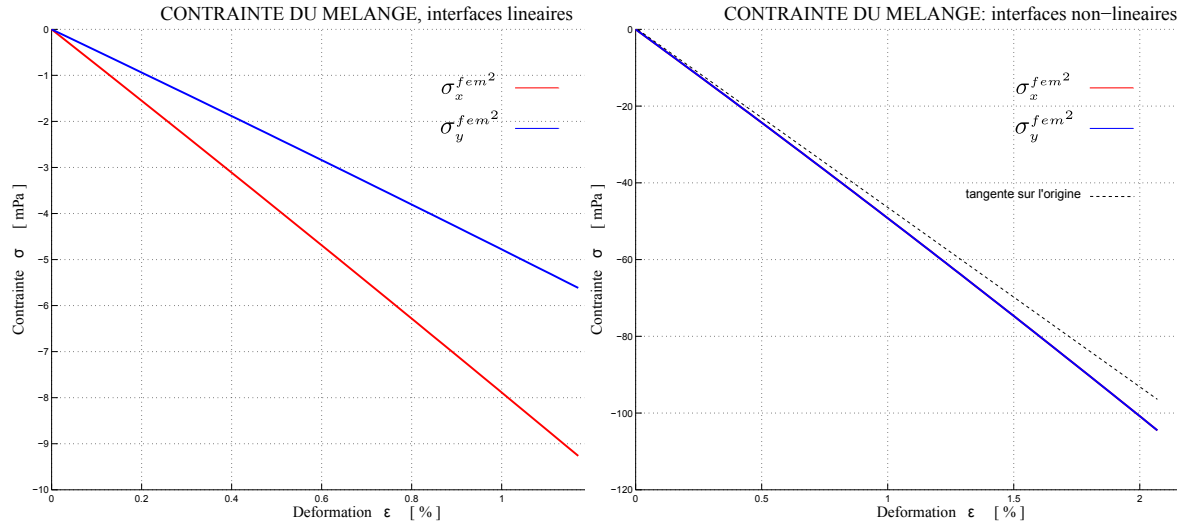


FIGURE 8.13 – Comportement du milieu homogénéisé : compression isotrope

Envisageant un comportement non-linéaire des interfaces, nous observons une réponse isotrope, les contraintes σ_x , σ_y étant égales. Cet aspect est justifié par la non-linéarité du comportement des forces de contact caractérisé par un coefficient de pénalisation k sur le terme quadratique de la parabole, qui est extrêmement forte ($k \approx 10^{15}$). Il suffit de déplacements de compénétration extrêmement petits afin d'avoir des forces de contact suffisamment grandes pour atteindre l'équilibre avec les conditions aux limites. Le coefficient de pénalisation est tellement grand que l'ordre de grandeur des déplacements est trop petit pour avoir des différences sensibles en contrainte. En figure 8.14 nous montrons l'état des interfaces pour ce cas de compression isotrope.

Homogénéité

Même pour ce cas de compression isotrope, l'homogénéité de l'état de contrainte a été vérifiée pour un calcul avec des interfaces linéaires et non-linéaires. Le tableau 8.6 montre la valeur de la contrainte pour trois différents taux de déformation.

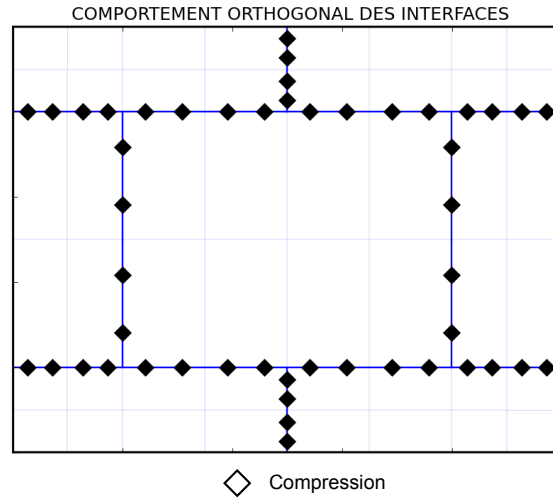


FIGURE 8.14 – Comportement de la microstructure : compression isotrope

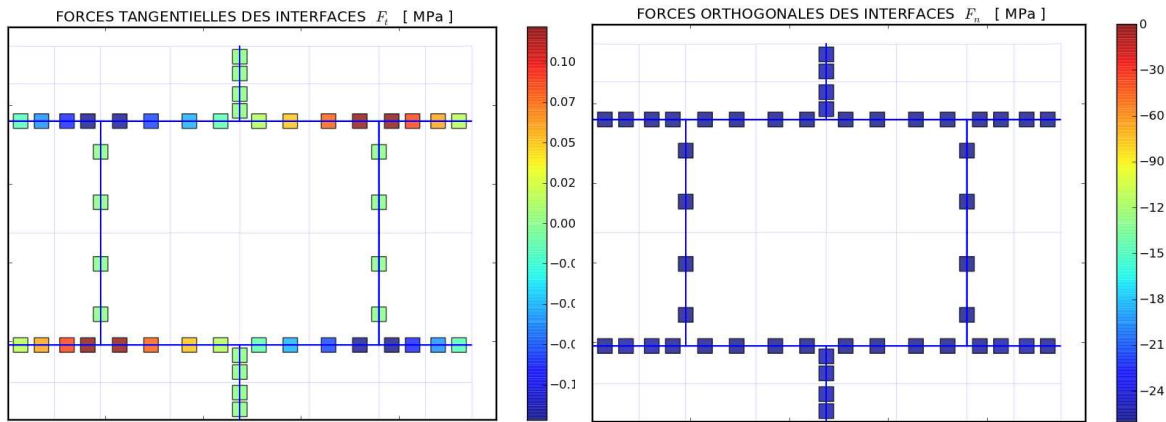


FIGURE 8.15 – Comportement de la microstructure : forces des interfaces horizontales et verticales.

Validation du comportement linéaire

Une comparaison avec un comportement linéaire a été proposée même pour ce cas de compression isotrope. La figure 8.16 montre la différence entre l'état de contrainte résultant du calcul et celui calculé avec le tenseur tangent comme expliqué pour le problème de tirage isotrope. Comme dans le cas du tirage isotrope, la figure 8.16 montre un comportement linéaire jusqu'à un taux de déformation de 0.6% après lequel l'hypothèse de grande déformation joue un rôle important. Cette évidence est confirmée aussi par les résultats du tableau 8.6.

Linéaire		ϵ 0.15 %		ϵ 0.30%		ϵ 0.60%		Non-linéaire	$\epsilon = 0.10$
[MPa]		σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xx}	σ_{yy}
ELEM 1	IP=1	-1.161	-0.702	-2.310	-1.409	-4.690	-2.840	-4.81458	-4.81450
	IP=2	-1.161	-0.702	-2.310	-1.409	-4.690	-2.840	-4.81458	-4.81450
	IP=3	-1.161	-0.702	-2.310	-1.409	-4.690	-2.840	-4.81458	-4.81450
	IP=4	-1.161	-0.702	-2.310	-1.409	-4.690	-2.840	-4.81458	-4.81450

TABLE 8.6 – État homogène de contrainte : cas de compression isotrope (loi de contact linéaire).

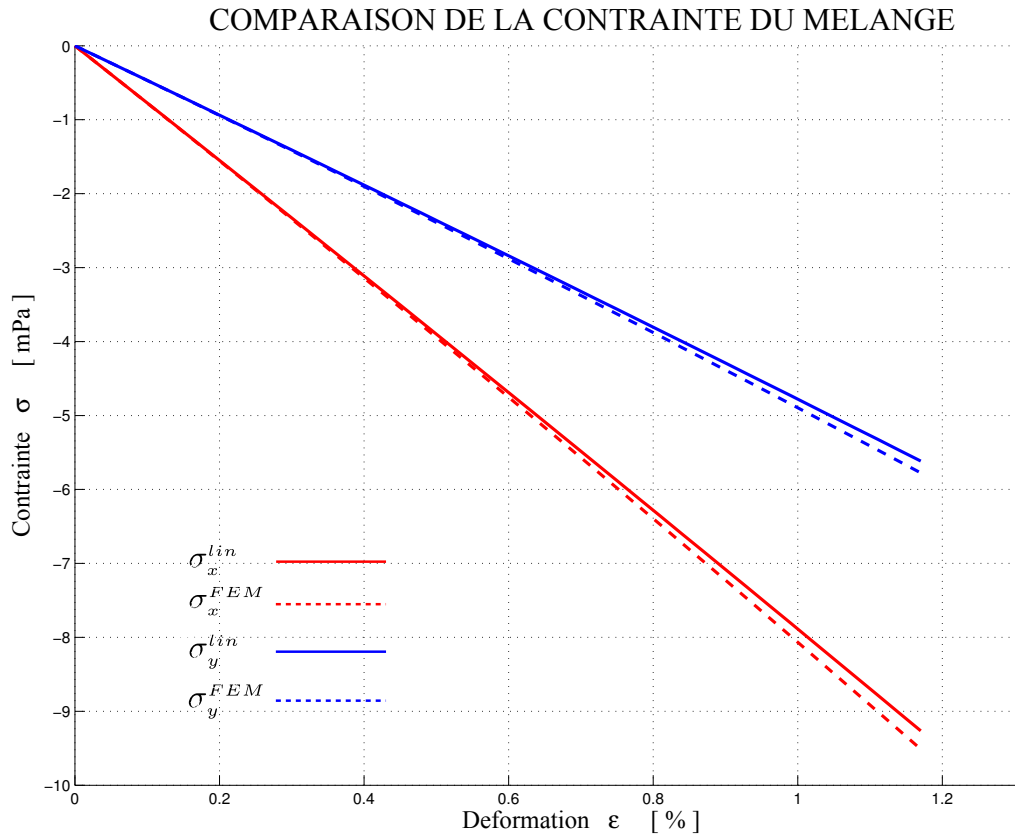


FIGURE 8.16 – Comparaison des contraintes avec un comportement linéaire

La même étude n'a été pas prise en compte pour le comportement non-linéaire des interfaces cohésives la réponse du milieu homogénéisée étant non linéaire déjà à partir des premiers taux de déformation imposée comme montré dans la figure 8.13.

Comparaison FEM²-micro

Dans la figure 8.17 on peut voir une comparaison entre la solution calculée avec les éléments finis au carré et celle calculé uniquement avec le code micro.

Convergence du problème

Une étude de convergence de la perturbation ϵ a été proposée comme dans le cas précédent (figures 8.18, 8.19 et 8.20). Cette étude n'a été consacrée qu'au cas de lois d'interfaces non-linéaires. En ce qui concerne la figure 8.18, on peut proposer les mêmes considérations faites pour l'évolution de la convergence pour le cas du *tirage isotrope*.

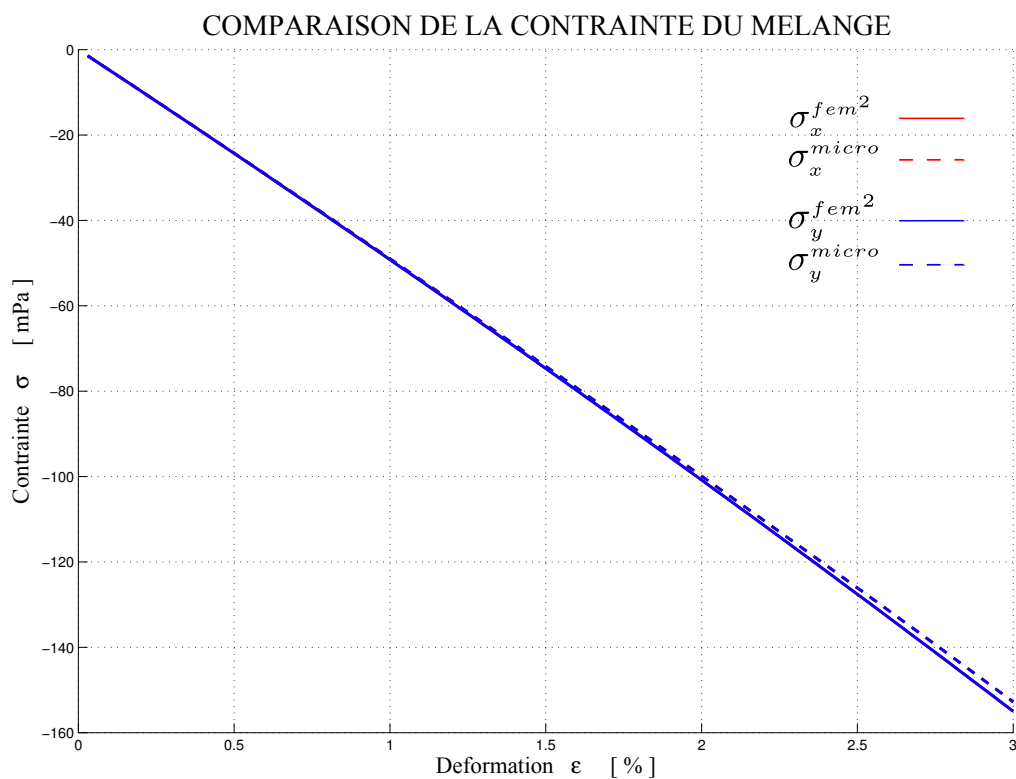
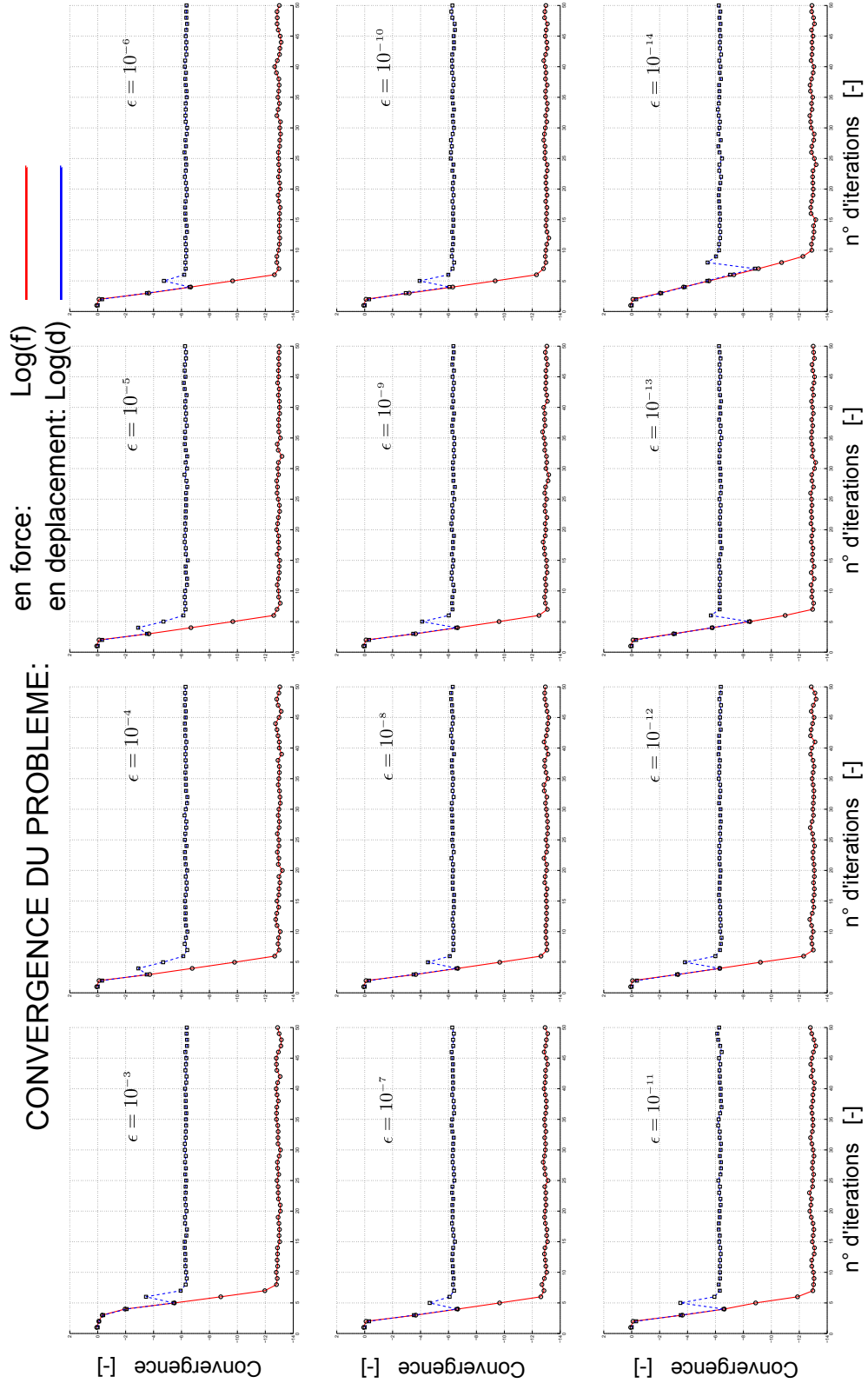


FIGURE 8.17 – Comparaison des contraintes avec le code micro

FIGURE 8.18 – Convergence du problème en fonction de la perturbation ϵ

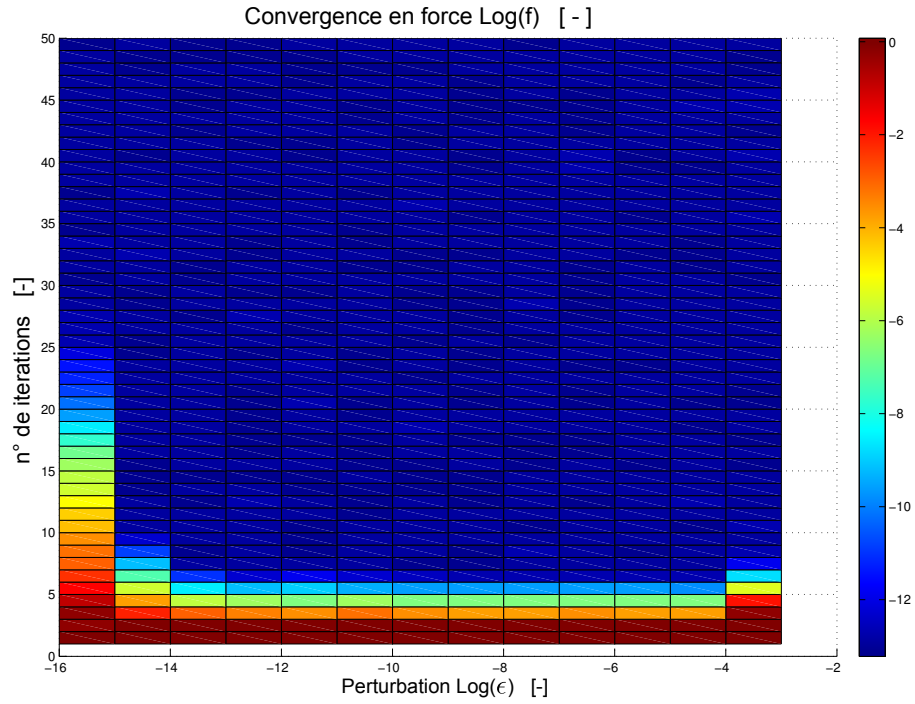


FIGURE 8.19 – Comportement du paramètre de convergence en force

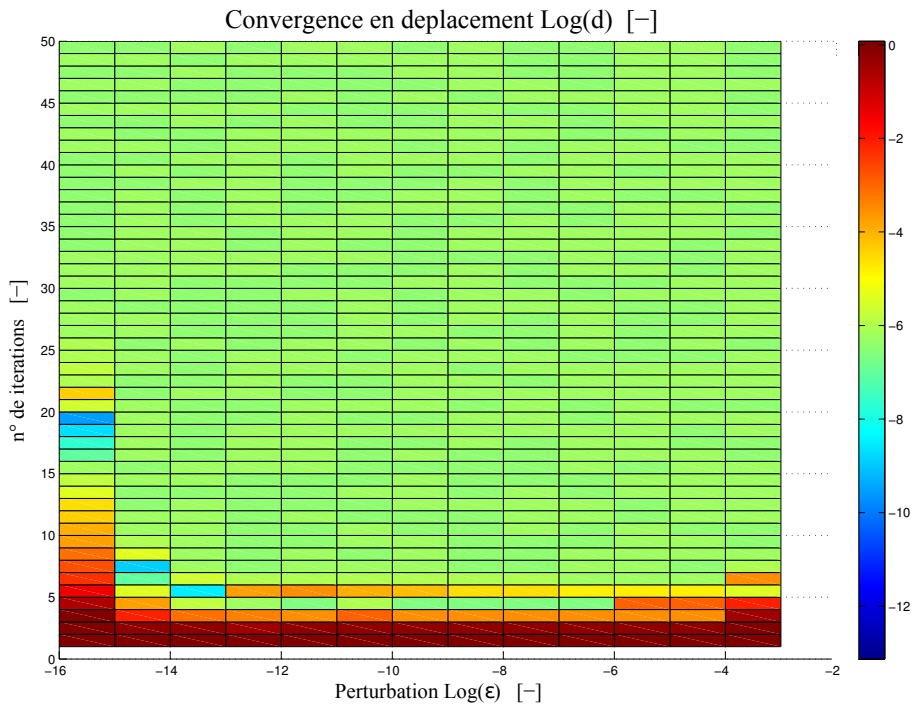


FIGURE 8.20 – Comportement du paramètre de convergence en déplacement

8.2.3 Cisaillement pur

Afin de retrouver une solution homogène pour un problème de cisaillement pur on impose les conditions aux limites montrées dans le tableau 8.7. Elles sont aussi dessinées en figure 8.21.

DDL Bloqués	Numéro des nœuds					DDL Imposés	Numéro des nœuds				
Déplacement u_x	-	-	3	-	-	Déplacement u_y	-	-	-	-	-
Déplacement u_y	1	2	3	4	5	Déplacement u_x	-	-	-	-	-
Déplacement u_y	6	7	8	9	10	Déplacement u_x	6	-	8	-	10
Déplacement u_y	11	12	13	14	15	Déplacement u_x	11	12	13	14	15
Déplacement u_y	16	17	18	19	20	Déplacement u_x	16	-	18	-	20
Déplacement u_y	21	22	23	24	25	Déplacement u_x	21	22	23	24	25

TABLE 8.7 – Conditions aux limites du problème : cisaillement pur

Pour un problème de cisaillement pur, les mêmes test faits pour les problèmes précédents ont été vérifiés. Les résultats ne sont pas affichés dans la suite de cette section puisqu'ils présentent des caractéristiques similaires à celles faites précédemment. La réponse mécanique du milieu homogénéisé peut être expliquée à partir du comportement de la micro-structure. Trois différents points peuvent être identifiés dans la courbe qui montre l'évolution des contraintes (figure 8.22).

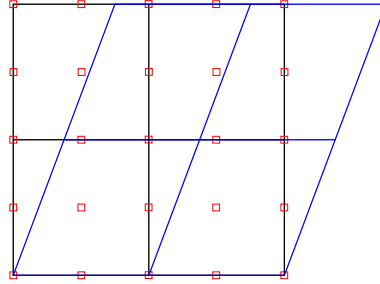


FIGURE 8.21 – Cisaillement pur

- Point 1 : Ce point correspond au dernier état élastique de la micro-structure (pas 166, figure 8.23) qui correspond au pic de la courbe déformation-contrainte. Les forces cohésives tangentiels des interfaces horizontales ont atteint leur limites élastiques.
- Point 2 : Ce point correspond à l'état de la micro-structure immédiatement après le pic de la courbe contrainte-déformation (pas 167). Les forces cohésives tangentiels des interfaces horizontales commencent à être endommagées, l'endommagement augmente de plus en plus avec le chargement (pas 299), jusqu'à la rupture de certaines interfaces.
- Point 3 : Il correspond à la rupture des interfaces cohésives tangentiels de la micro-structure (pas 300).

L'évolution de la contrainte σ_{xy} du mélange reflète le comportement des interfaces horizontales, les interfaces verticales étant presque déchargées.

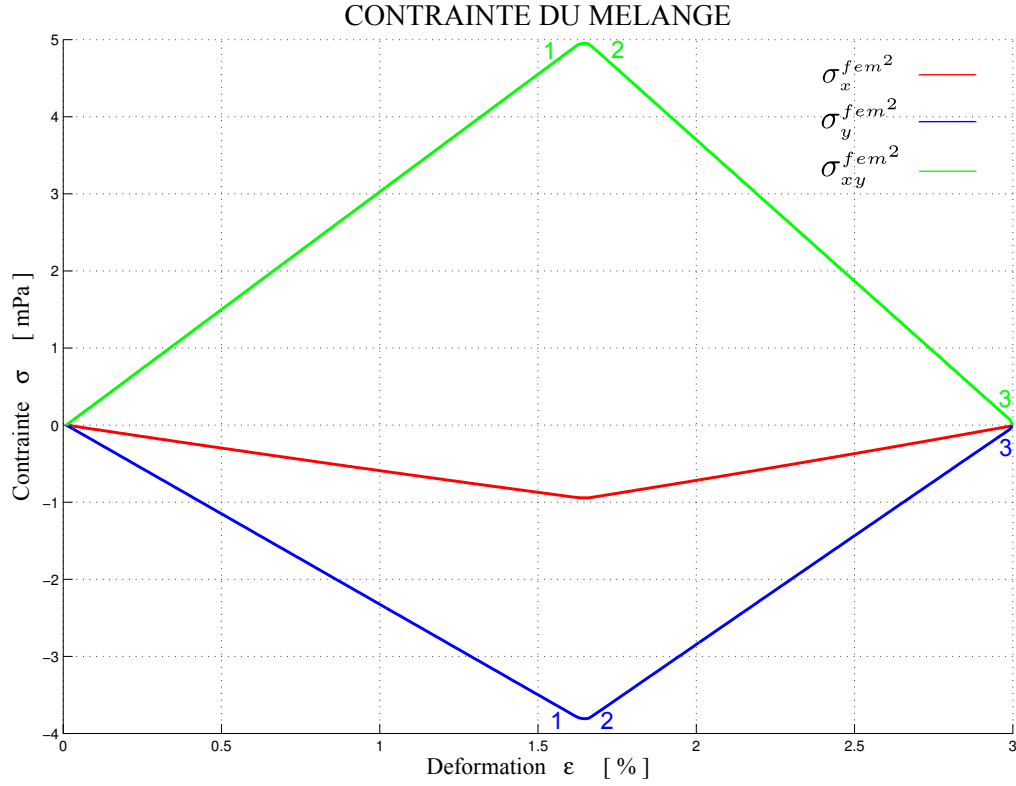
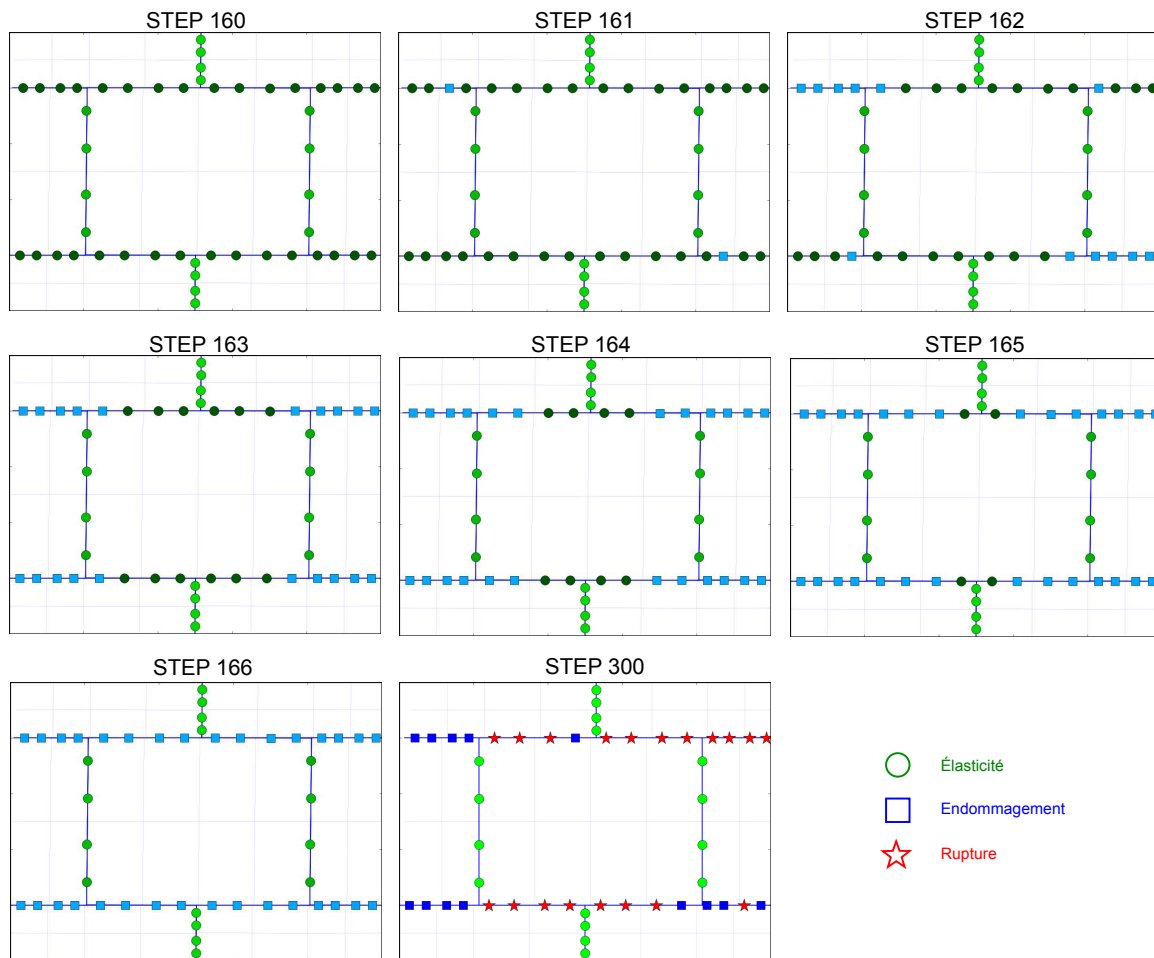


FIGURE 8.22 – Évolution des contraintes.

COMPOTEMENT TANGENTIEL DES INTERFACES



COMPOTEMENT ORTHOGONAL DES INTERFACES

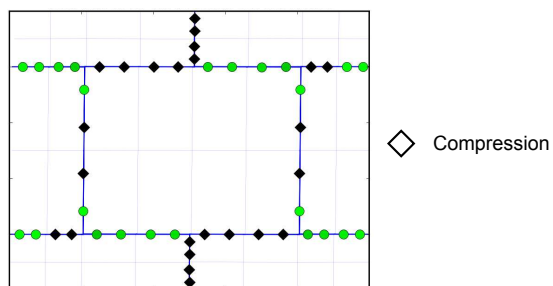
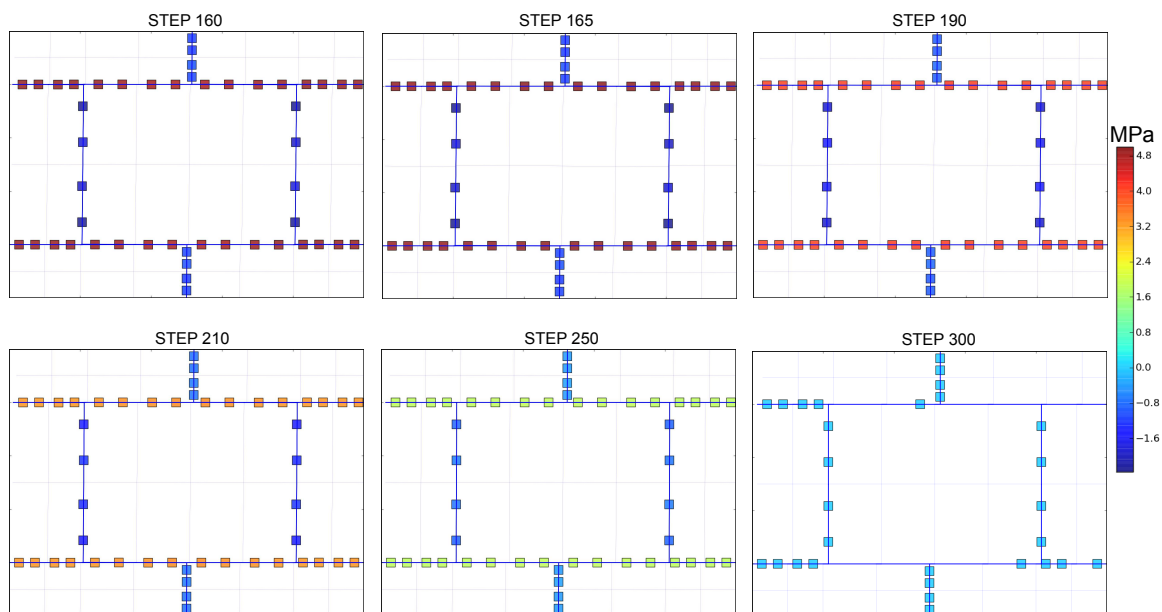


FIGURE 8.23 – Comportement de la microstructure : problème de cisaillement pur

FORCES TANGENTIELLES DES INTERFACES



FORCES ORTHOGONALES DES INTERFACES

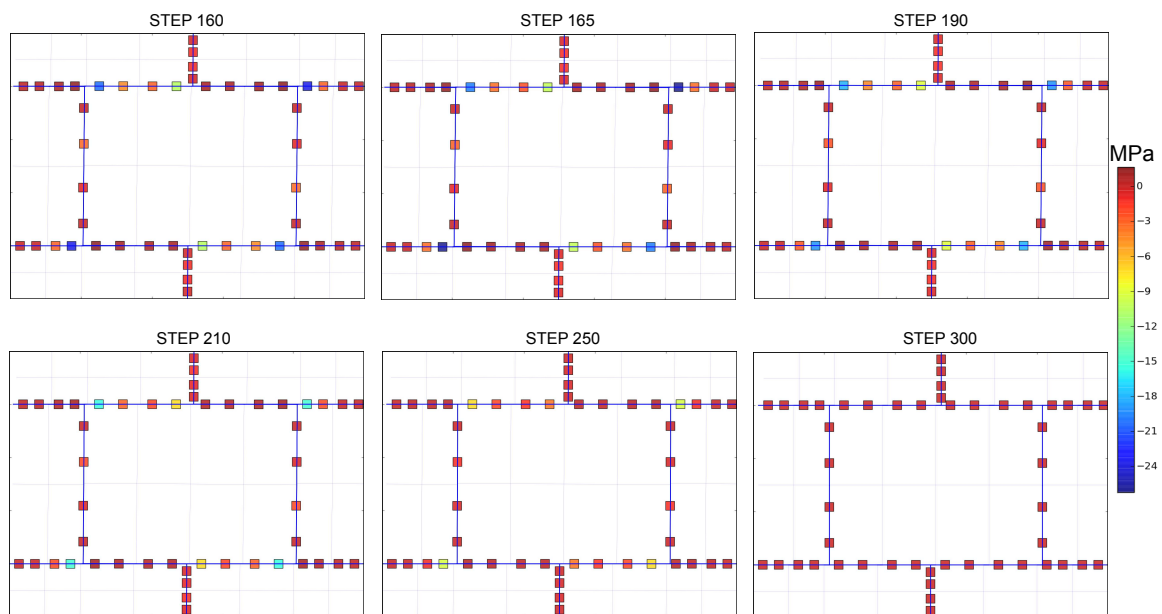


FIGURE 8.24 – Forces des interfaces : problème de cisaillement pur

8.3 Validation du problème couplé

Dans cette section nous montrons un calcul hydromécanique en conditions œdométriques où le comportement des interfaces reste dans un régime élastique. Le domaine envisagé est composé par une colonne de huit éléments carrés d'une hauteur de 4 mm (figure 8.25.a). Le chargement aux nœuds du bord supérieur en terme de déplacement est appliqué avec une vitesse de 10^{-4} mm/s pendant 10 secondes. Nous avons utilisé ce calcul pour valider de façon qualitative l'implémentation du système couplé. La raison pour laquelle nous appliquons les conditions au limits en traction est due à l'effet de la pression d'eau à l'échelle microscopique. Étant la pression du fluide négative, les interfaces tendent à se fermer ce qui garantie que le comportement global du milieu homogénéisé reste dans un domaine élastique. Les paramètres utilisés sont ceux du tableau 8.2 et le modèle d'écoulement fluide considéré est celui d'un fluide qui coule entre deux plan parallèles.

Nous avons utilisé ce calcul pour vérifier de façon qualitative les résultats obtenues. À l'échelle macroscopique nous montrons la pression d'eau p_w (figure 8.25), la contrainte totale horizontal du mélange σ_{xx} (figure 8.26), la contrainte totale vertical du mélange σ_{yy} (figure 8.27), flux massique vertical m_{yy} (figure 8.28). Plusieurs observations peuvent être faites :

- La courbe de la pressions d'eau p_w est symétrique par rapport à un axe horizontal x qui passe par le centre du domaine. Les dix pas affichés montrent des incréments de pression d'eau négatives qui diminuent au fur et à mesure du chargement. Ces incréments tendent une valeur négligeable depuis le pas 6.
- Dans les figures 8.26, 8.27 nous montrons la contrainte totale horizontale σ_{xx} et verticale σ_{yy} du mélange. La première est symétrique par rapport à un axe horizontal x qui passe par le centre du domaine alors que la deuxième, pour l'équilibre de la colonne, est constante tout le long de l'axe vertical y .
- Le débit de flux massique est affiché en figure 8.28. Dans cette figure nous observons la symétrie de la solution par rapport l'axe vertical et la cohérence du signe de m_{yy} par rapport à celui du gradient de la pression d'eau.

Dans les figures 8.29, 8.30, 8.31 et 8.32 nous montrons les résultats de ce problème aux limites à l'échelle macroscopique en substituant à chaque point de Gauss l'état de la microstructure en terme de forces d'interfaces et des pressions d'eau. Ce faisant il est possible d'interpréter le comportement macroscopique à partir du comportement à l'échelle microscopique.

En utilisant la même convention utilisée dans la section 8.2 pour décrire l'état des interfaces, toutes les interfaces cohésives sont caractérisées par un état élastique (symbole vert). En figure 8.29 il est possible d'observer que certaines interfaces sont en compres-

sion (symbole noir), à cause de la valeur négative de la pression d'eau macroscopique. Dans les figures 8.30 et 8.31 nous affichons les deux composantes des forces d'interfaces où la solution se présente symétrique par rapport à l'axe y puisque le problème est unidimensionnel. Les composantes tangentielles des forces cohésives présentent une distribution symétrique par rapport au centre du domaine car, pour deux éléments opposés, le gradient de pression macroscopique est de signe opposé.

Au début du chargement, la valeur des forces orthogonales est petite dans le centre de la colonne à cause du fait que la valeur négative de la pression d'eau tend à fermer les interfaces alors que sur le bord cette valeur est petite et les interfaces sont plus chargées. Vers la fin du chargement où les incréments de pression d'eau tendent à zéro, la composante orthogonale des forces d'interfaces se redistribue sur tout le domaine. La figure 8.32 présente la distribution de la valeur nodale de la pression d'eau à l'échelle microscopique. Les couleurs de plus en plus foncées, reflètent la tendance de la pression d'eau à l'échelle macroscopique 8.25.

Une perspective importante est représentée par la comparaison de courbes de consolidation obtenues à l'aide d'un calcul avec les éléments finis au carré avec celles obtenues avec la théorie de Biot en envisageant comme paramètres (coefficient de Biot, coefficient d'emménagement et perméabilité) les paramètres du milieu homogénéisé. Ce calcul représentera une validation rigoureuse de l'implémentation de la loi de comportement couplée FEM² et il sera pris en compte dans les perspectives de ce travail de thèse.

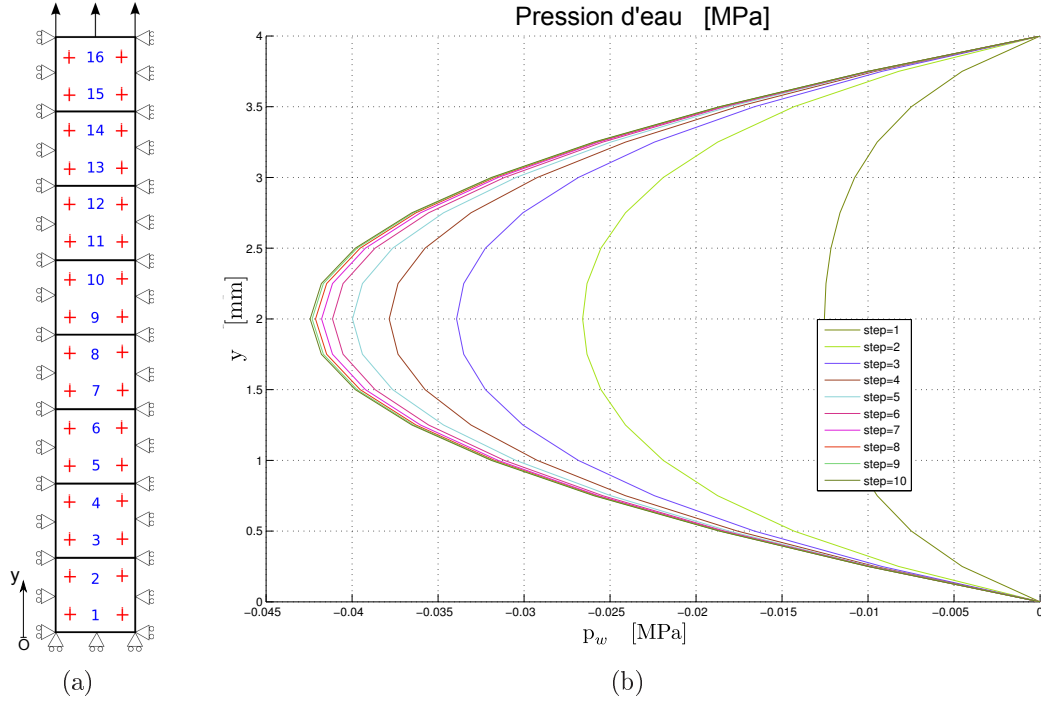


FIGURE 8.25 – Domaine à l'échelle macroscopique, a). Pression d'eau p_w à l'échelle macroscopique, b)

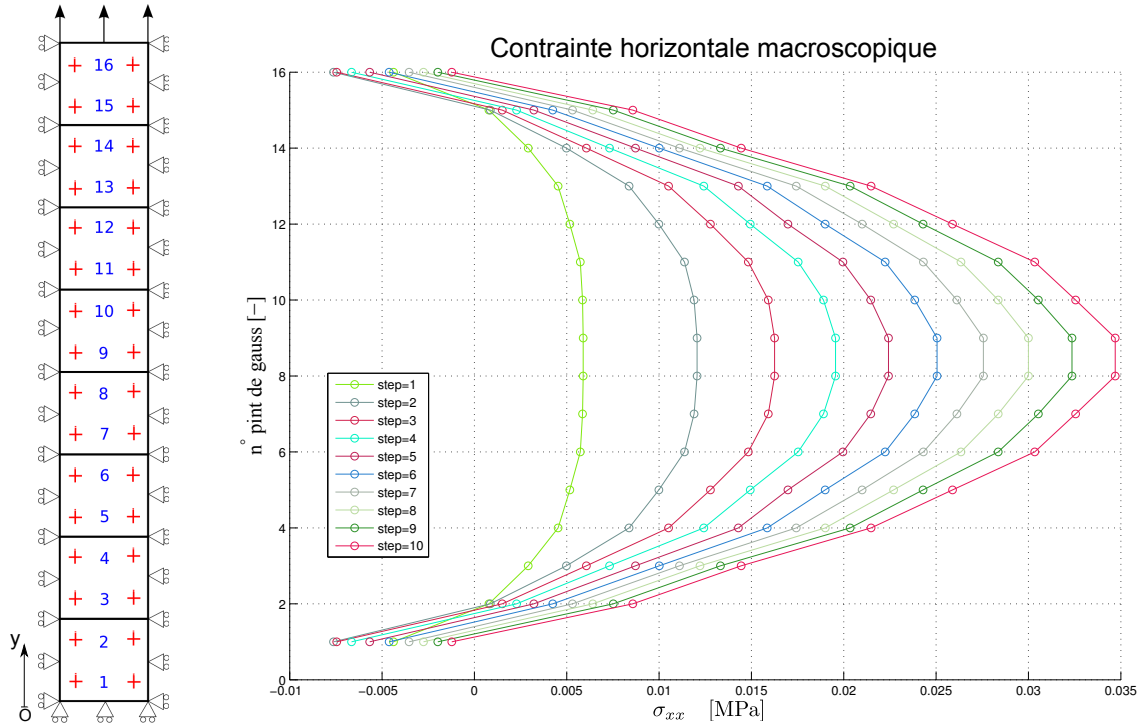
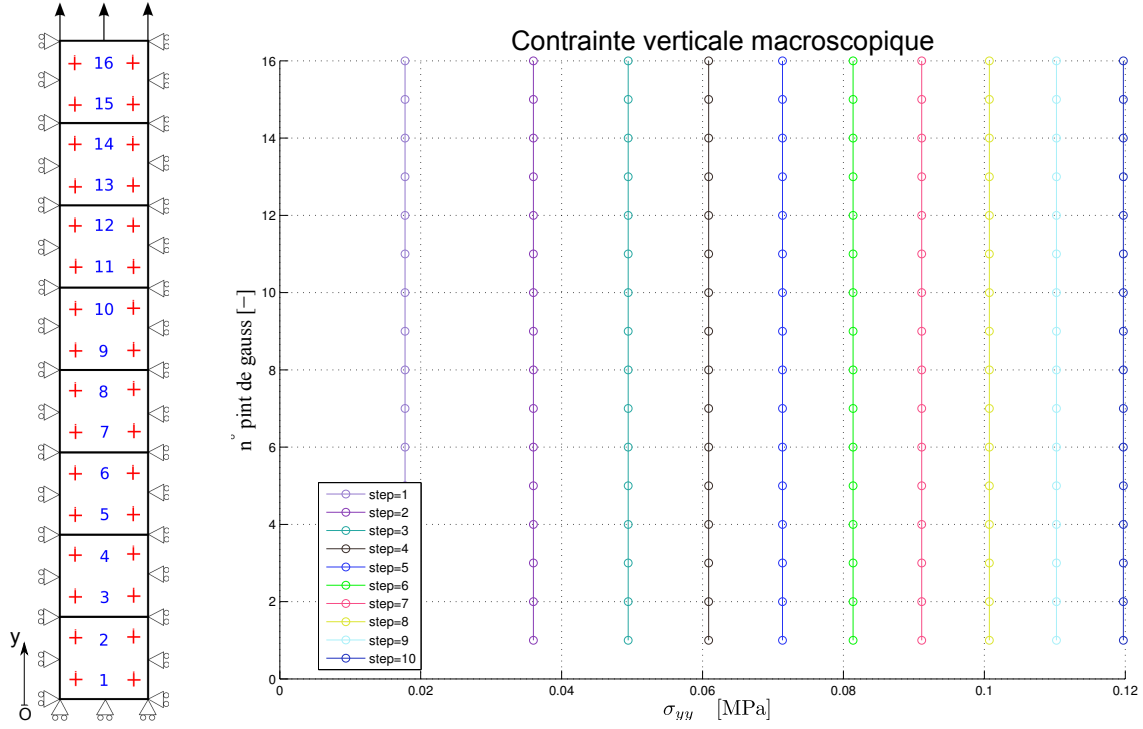
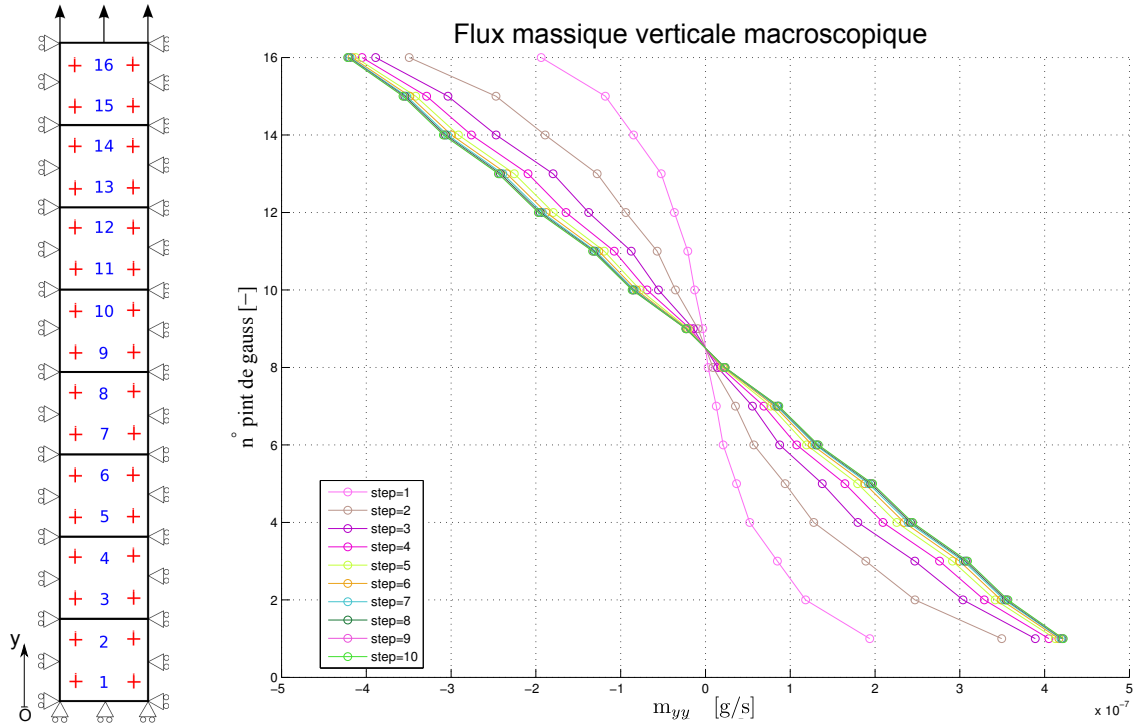


FIGURE 8.26 – Contrainte horizontale σ_{xx} à l'échelle macroscopique

FIGURE 8.27 – Contrainte horizontale σ_{yy} à l'échelle macroscopiqueFIGURE 8.28 – Flux massique horizontale m_{yy} à l'échelle macroscopique

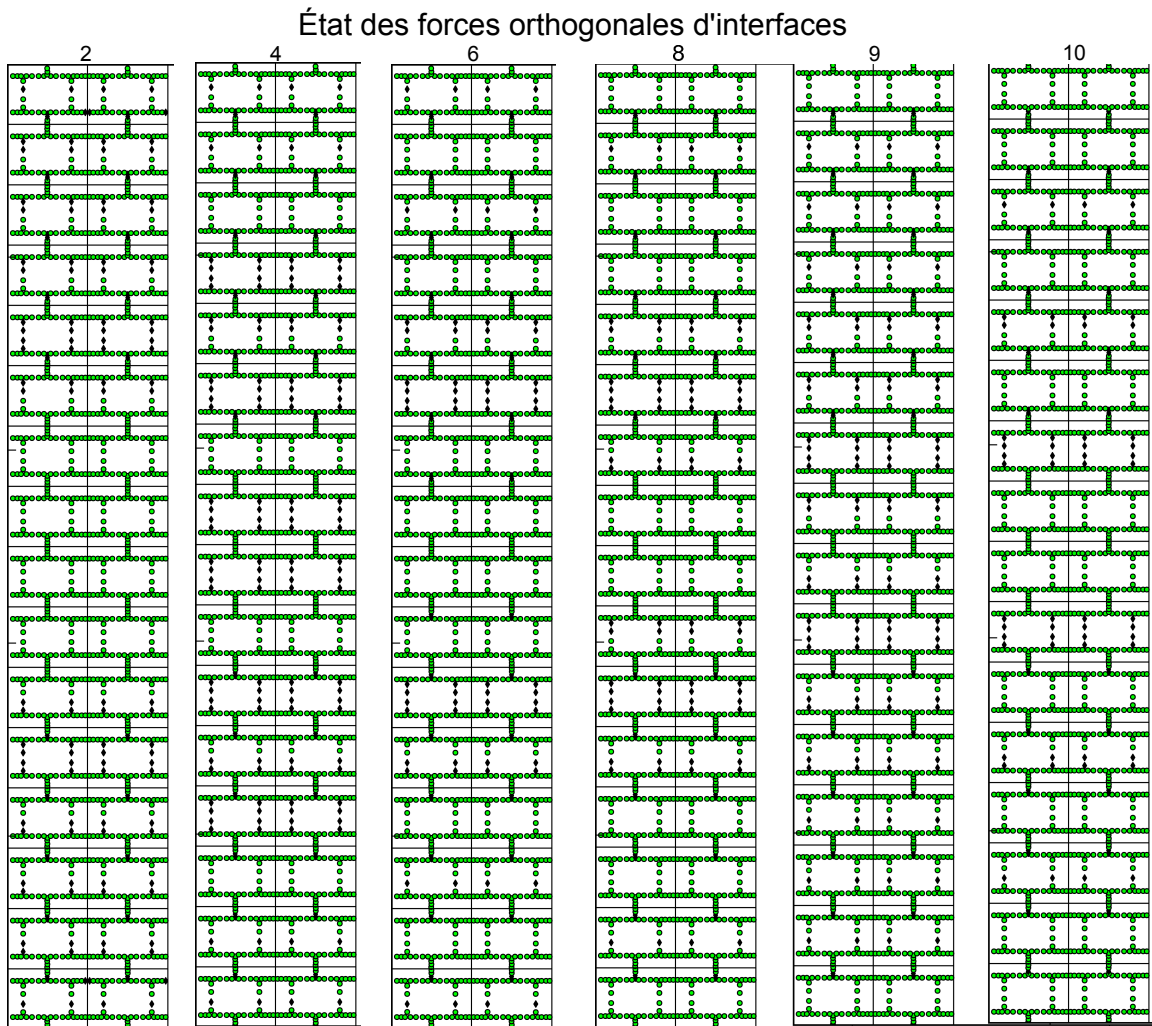


FIGURE 8.29 – État des forces orthogonales d'interface : en vert un état élastique de traction, en noir un état élastique de compression

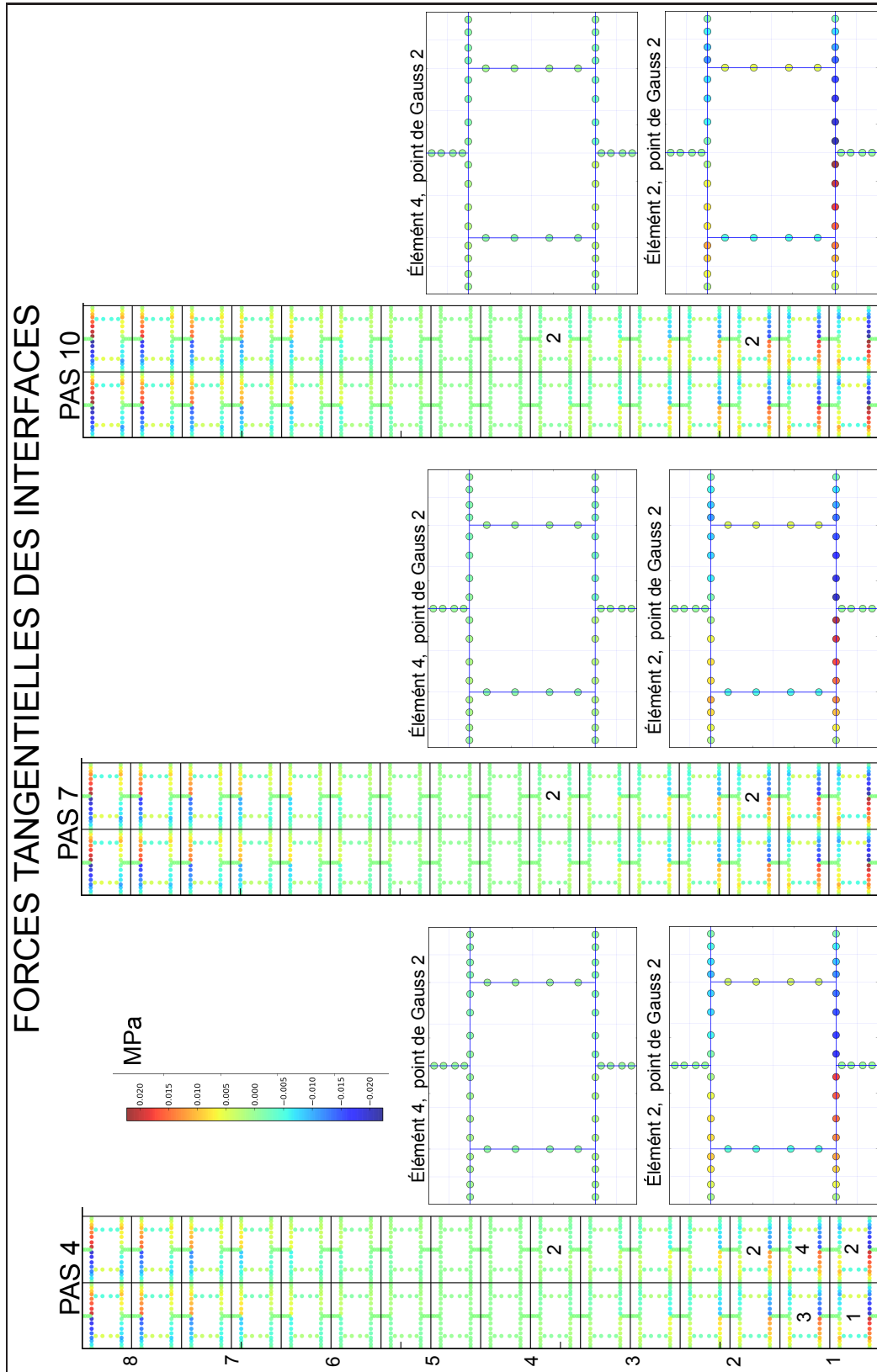


FIGURE 8.30 – Forces tangentielles horizontales de la microstructure

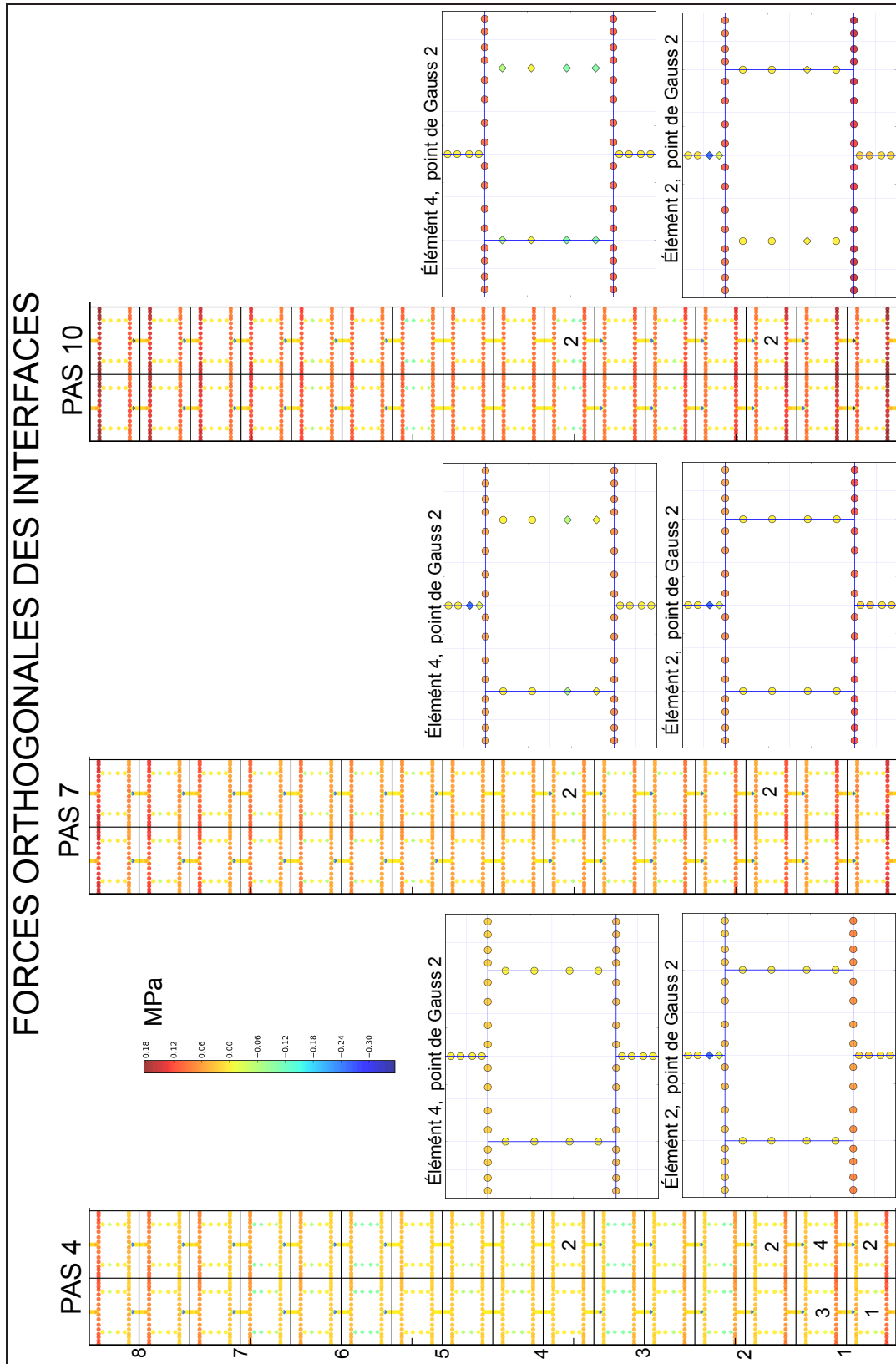
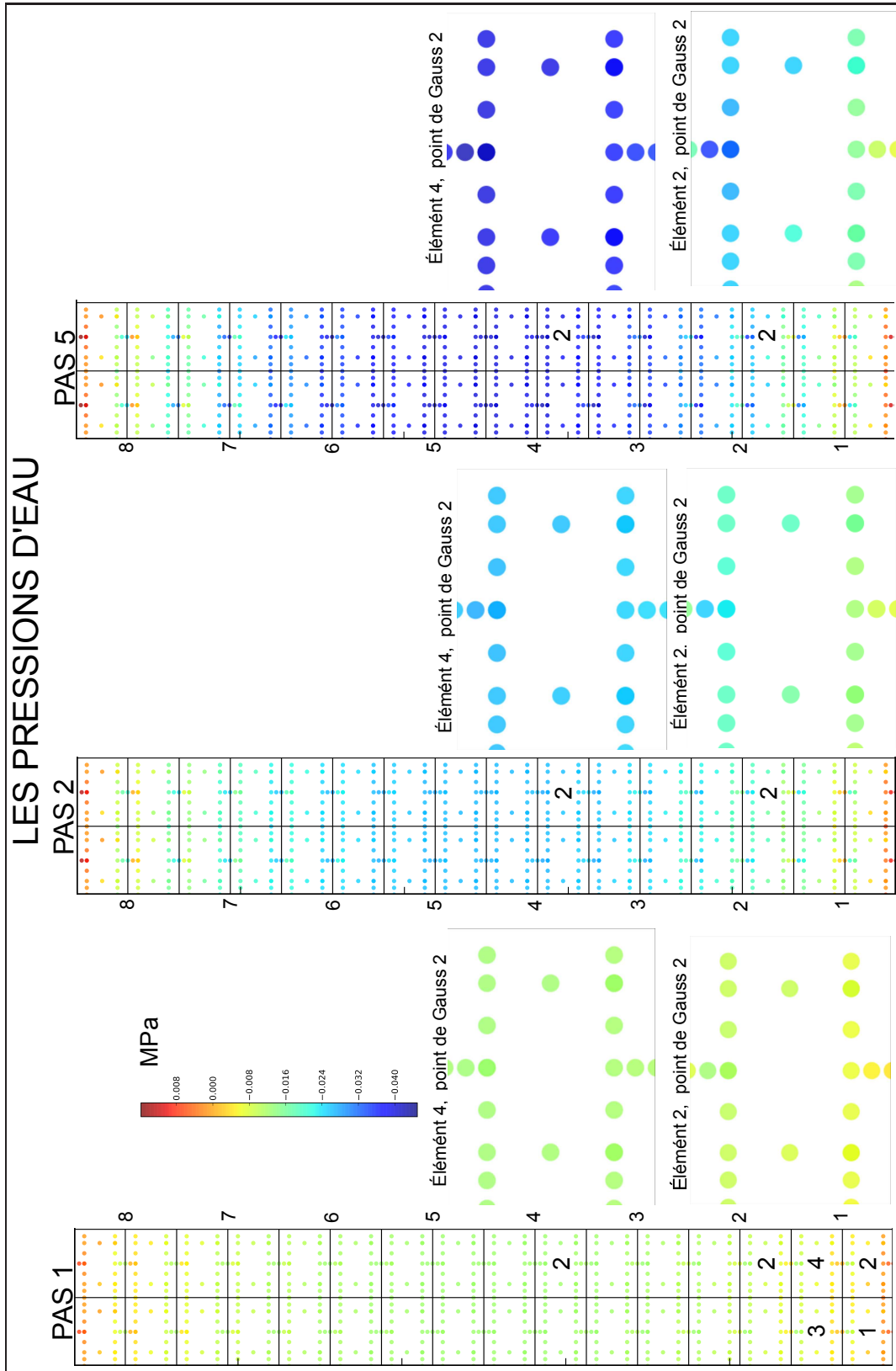


FIGURE 8.31 – Forces tangentielles verticales de la microstructure

FIGURE 8.32 – Flux massique horizontale m_{yy} à l'échelle macroscopique

8.4 Conclusions

Après avoir présenté les détails du modèle à l'échelle microscopique dans le chapitre 7, dans ce chapitre nous montrons des résultats à deux échelles d'observation, à la fois pour des problèmes aux limites en mécanique et pour un problème en hydromécanique. Tous les essais numériques proposés ont été faits avec une microstructure composée par des grains à forme de brique (3 grains au total) et des interfaces horizontales et verticales.

Afin d'obtenir des résultats à l'échelle macroscopique, nous avons implémenté le code qui traite le problème numérique sur la microstructure dans Lagamine, code aux éléments finis de l'Université de Liège. L'implémentation a été faite en respectant le format de Lagamine en ce qui concerne le passage entre le début et la fin du pas des variables d'état, que pour cette loi de comportement, sont représentées par les coordonnées de la microstructure x_i et les ouvertures maximales normalisées λ_i^{max} . En imprimant les variables d'état à la fin de chaque pas de temps sur un fichier de texte, il est possible de reconstruire l'état de chaque microstructure dans l'espace et dans le temps.

La validation de l'implémentation pour des problèmes en mécanique pure a été faite à l'aide de plusieurs calculs dans lesquels nous avons imposé des déplacements à la frontière du domaine macroscopique afin d'avoir un champ de déformation homogène dans le milieu. Trois cas ont donc été étudiés : la traction isotrope, la compression isotrope et le cisaillement pur. Pour ces problèmes aux limites, nous avons vérifié l'homogénéité de la réponse en contrainte et la linéarité du problème en conditions de petites déformations. Étant donné que la contrainte est homogène, nous avons aussi comparé les résultats à deux échelles à ceux obtenus uniquement avec le code micro développé par Frey [68].

Une validation qualitative a été proposée pour un problème hydromécanique en conditions oedométriques. Les résultats obtenus à l'échelle macroscopique en terme de contrainte et de pression d'eau respectent toutes les symétries du problème et semblent être physiquement acceptables. Le comportement des contraintes et de la pression d'eau dans le temps et dans l'espace est cohérent avec les valeurs des forces d'interface et les valeurs nodales de la pression d'eau pour chaque microstructure.

Cinquième partie

Conclusions Générales

Chapitre 9

Conclusions Générales

Dans cette thèse nous avons considéré deux approches différentes pour modéliser le comportement couplé des géomatériaux. Dans la première approche, appelée phénoménologique ou aussi expérimentale, nous considérons un milieu poreux équivalent caractérisé par un mélange des deux phases dont nous connaissons les taux. Afin de décrire le comportement du squelette solide, nous avons utilisé la théorie de l'élasto-plasticité en petites déformations. Dans la deuxième approche nous avons utilisé la méthode de l'homogénéisation numérique (les éléments finis aux carrés) pour décrire le comportement couplé d'un milieu poreux. Ce faisant, la loi de comportement du milieu est décrite à partir de ses caractéristiques à une échelle d'observation microscopique.

9.0.1 Une loi de comportement anisotrope.

La première approche a été utilisée pour modéliser les essais de laboratoire sur un cylindre creux faits par l'EPFL dans le cadre du projet européen Timodaz. Après avoir comprimé de façon isotrope un cylindre creux, l'essai se fait en deux phases : une première (phase A) de déchargement à l'intérieur du cylindre creux et une deuxième (phase B), dans laquelle le chargement est laissé constant pour faire dissiper les pressions d'eau.

Ces essais ont pour objectif d'étudier, à une échelle de laboratoire, la zone endommagée EDZ autour d'un forage creusé d'argile de Boom, qui montre un comportement fortement anisotrope. Dans ce cadre, deux lois de comportement élasto-plastiques basées sur un critère de charge de type Drucker-Prager ont été utilisées (Plasol et Plasol anisotrope). Ce qui les différencie est la description de la partie élastique pour laquelle nous avons utilisé un modèle isotrope (Plasol) et un modèle transversalement isotrope (Plasol anisotrope).

L'introduction de l'élasticité transversale permet de décrire de façon qualitative l'apparition des déformations plastiques anisotropes dans le domaine étudié. La forme ovalisée autour du forage, les irrégularités sur le bord intérieur, et la région où les dé-

formations plastiques sont plus fortes, représentent des aspects que nous retrouvons en regardant les essais expérimentaux. Dans la plupart des tests numériques réalisés, des bandes de cisaillement se déclenchent en bandes à spirale et en bandes conjuguées à l'intérieur du cylindre creux. À cause d'une définition insuffisante des scansions prises, les solutions numériques avec localisation n'ont été pas comparés à d'éventuelles parcours en bandes de cisaillement présentes dans l'échantillon d'un cylindre creux.

Pour étudier les solutions possibles en bandes de cisaillement, que peuvent présenter pour ce problème aux limites les deux lois de comportement, une étude de non unicité est proposée. Afin de trouver des solutions différentes dans le temps et dans l'espace, nous avons lancé plusieurs calculs en changeant les données pour la discrétisation temporelle. De cette façon, le calcul traverse des pas de temps différents et l'initialisation de l'algorithme de Newton-Raphson est différente pour chaque calcul. Pour les deux lois de comportement, Plasol et Plasol anisotrope, les solutions trouvées peuvent être classifiées en trois groupes :

1. Groupe 1 :
Solutions axiale-symétrique (Plasol) et solution symétrique par rapport aux axes vertical et horizontal (Plasol anisotrope).
2. Solutions avec déformations localisées en bandes de cisaillement
 - (a) Groupe 2 :
Formation des bandes de cisaillement de l'intérieur du cylindre creux.
 - (b) Groupe 3 :
Formation des bandes de cisaillement à partir d'une décharge d'une zone plastifiée.

Plusieurs perspectives peuvent être envisagées afin d'améliorer le modèle Plasol anisotrope.

- Couplage entre la valeur de la perméabilité et les déformations plastiques. Il est ainsi possible de décrire une augmentation de la perméabilité en fonction de l'endommagement du matériau.
- Utilisation des contraintes effectives de Biot au lieu des contraintes effectives de Terzaghi.
- Modélisation du comportement élastoplastique introduisant l'anisotropie aussi dans la fonction de charge f .

9.0.2 La méthode de l'homogénéisation numérique.

L'homogénéisation numérique FEM² représente une approche alternative à celle des lois de comportement phénoménologique puisqu'elle nous permet de construire la loi constitutive à partir des caractéristiques microstructurales du matériau. Le modèle que nous avons envisagé se base sur l'hypothèse de milieu périodique et il caractérise la microstructure avec des composantes de type grains et des composantes d'interface. Elles permettent de transmettre le chargement entre les grains et identifient un réseau de canaux fluides à l'intérieur desquels l'eau peut couler.

En utilisant le travail de Frey [68] qui a développé le code pour la résolution du problème à l'échelle microscopique, nous l'avons implémenté dans un code aux éléments finis (Lagamine), afin de pouvoir utiliser cette loi de comportement hydromécanique, dans le cadre d'un problème aux limites à une échelle d'observation macroscopique.

La validation de l'implémentation pour un problème en mécanique pure a été fait à l'aide de plusieurs calculs où, en imposant des conditions aux limites en déplacement, le domaine est caractérisé par un état de déformation homogène. Nous avons ainsi vérifié l'homogénéité de l'état de contrainte, la linéarité du comportement soumis à de petites déformations et comparé les résultats avec ceux obtenus uniquement avec le code pour la résolution du problème à l'échelle microscopique. Le comportement macroscopique d'un problème hydromécanique a été validé de façon qualitative en s'assurant que toutes les symétries du problème étaient respectées et que les résultats étaient physiquement admissibles. Les résultats à l'échelle macroscopique sont cohérents avec ceux à l'échelle microscopique.

La méthode des éléments finis au carré donne une contribution importante à la définition d'une loi de comportement en partant par les caractéristiques microstructurales d'un matériau. Cette méthode peut bien s'adapter à la modélisation du comportement des géomatériaux. L'approche que nous avons suivie permet notamment de décrire une microstructure composée par cristaux comme dans un grès (figure 9.1.a) mais aussi une microstructure d'un matériau argileux (figure 9.1.b) où nous pouvons modéliser les agrégats des feuillets d'argile par les grains de la cellule périodique du modèle. Dans ce dernier cas l'hypothèse d'imperméabilité des grains ne peut plus être valable et il est nécessaire de considérer les grains du modèle comme un milieu poreux à très basse perméabilité.

À la différence des modèles phénoménologiques, il n'est plus nécessaire de faire des hypothèses sur la façon de définir la contrainte totale du milieu poreux car elle est directement obtenue à partir d'un calcul numérique à l'échelle microscopique. Cette approche permet aussi de dépasser tous les problèmes qui concernent la définition de la perméabilité du milieu poreux en fonction de l'endommagement. Dans cette méthode d'homogénéisation numérique une perméabilité équivalente du milieu homogénéisé est directement calculée en fonction de l'histoire de la cinématique, notamment en fonction du comportement des interfaces mécaniques sur lesquelles nous supposons être

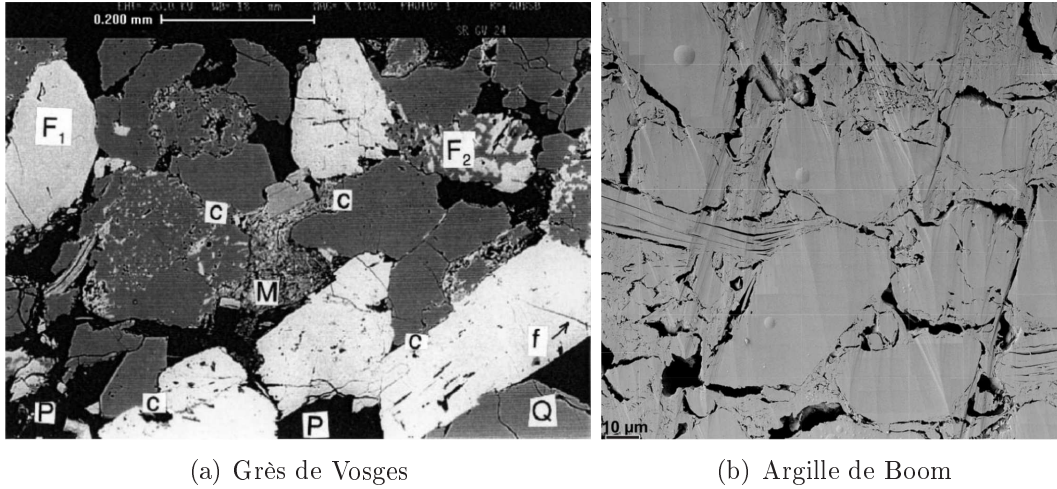


FIGURE 9.1 – Microstructure d’une grès a), Besuelle et al. [28] et d’une roche argileuse b), Hemes et al. [77].

concentré tout l’endommagement de la microstructure. Le comportement anisotrope du matériau est aussi déterminé par la géométrie de la microstructure du matériau comme on a pu le voir dans tous les résultats de la section 8.2. Cette méthode permet donc de dépasser toute la complexité analytique des modèles anisotropes dans le cadre de l’élasto-plasticité en grandes déformations.

Il est importante de remarquer que si les techniques de mesure de champs nous permet d’avoir des informations à une échelle microscopique, ces techniques ne donnent pas des indications sur le comportement des interfaces cohésives. En raison d’un manque de données expérimentales significatives, nous avons choisi de modéliser les interfaces cohésives avec une loi de comportement élastique avec adoucissement linéaire, loi dont les paramètres mécaniques ne correspondent pas à ceux d’un matériau réel. Ce choix a été fait en continuité avec le travail de Frey [68]. Si nous hypothisons de connaître précisément la microstructure et les lois de comportement qui caractérisent les composantes de la microstructure nous pouvons supposer que à l’échelle macroscopique le comportement du matériau est correctement décrit. Contrairement le comportement macroscopique observé se relève plutôt arbitraire si nous sommes obligés de faire des hypothèses simplificatives sur les composantes à l’échelle microscopique du milieu (géométrie et lois de comportement). Dans cet esprit un travail d’analyse inverse pourrait être pris en compte comme perspective à long terme afin de déterminer une microstructure et des paramètres hydromécaniques qui puissent bien décrire le comportement macroscopique du matériau pendant un essai de laboratoire. Dans ce cadre il sera de toute façon nécessaire considérer les images obtenues au microscope afin de définir une microstructure proche de la réalité.

Le désavantage principal des éléments finis aux carré est sans doute son coût en

temps de calcul, surtout dans le cas où le tenseur tangent consistant est calculé à l'aide d'une méthode de perturbation. Dans ce sens, une amélioration importante a été apportée par Kouznetsova et al. [86] qui ont appliqué une méthode de condensation pour le calcul de la matrice tangente. Avec cette méthode, à la différence de la celle de perturbation, l'intégration de la contrainte au niveau microscopique est faite une seule fois. Cette solution a été déjà prise en compte par Van Den Eijnden [144] dans le cadre d'une amélioration du code qui traite le problème microscopique. La parallélisation du code des éléments finis à l'échelle macroscopique (Lagamine), au niveau de l'intégration de la loi de comportement sur chaque point de Gauss et au niveau du solver, représente une optimisation importante qui peut diminuer de manière significative le temps de calcul.

Au niveau de l'implémentation, en perspective, il est possible citer tout ce qu'il concerne l'enrichissement de la microstructure en utilisant des lois d'interface plus compliquées comme par exemple Tvergaard 2003 [142], considérer les grains comme des milieux poreux à perméabilité donnés, implémenter la possibilité de faire des calculs couplés même au niveau thermique.

Au niveau des calculs à faire nombreux sont les calculs qui est intéressante faire :

- Calculs en mécanique pure sur une biaxial afin de décrire la localisation des déformations.
- Calcul en compression oedométrique pour valider de façon numérique le comportement hydromécanique avec la solution exacte de la consolidation unidimensionnel.
- Calculs en hydromécanique sur une biaxial afin de décrire la localisation des déformations et regarder comment varie la perméabilité du milieu homogénéisé au cours de l'endommagement.
- Calculs sur un cylindre creux pour modéliser les essais de Lausanne avec la microstructure de figure 8.2 et comparer le comportement en régime de localisation du milieu homogénéisé avec le comportement de la loi Plasol anisotrope.

Les milieux continus second gradient peuvent toujours être utilisés pour décrire de façon objective la localisation des déformations en utilisant une loi de comportement de type FEM².

Sixième partie

Annexe

Annexe A

Developement analytique sur l'anisotropie transversale

A.1 Paramètres mécaniques

Une relation parmi les paramètres mécanique de l'équation 4.62 et les paramètres de l'équation 4.63 est proposer ci-dessus :

$$\lambda + 2\mu_t = \frac{E_\pi(1 - \nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})}{(1 + \nu_\pi)(1 - \nu_\pi - 2\nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})}$$

$$\lambda = \frac{(\nu_\pi + \nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})E_\pi}{(1 + \nu_\pi)(1 - \nu_\pi - 2\nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})}$$

$$\alpha + \lambda = \frac{\nu_{\pi 3}E_3 \cdot (1 + \nu_\pi)}{(1 + \nu_\pi) \cdot (1 - \nu_\pi - 2\nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})}$$

$$\lambda + \beta + 2(\mu_l + \mu_t + \alpha) = \frac{(1 - \nu_\pi^2)E_3}{(1 - \nu_\pi - 2\nu_{\pi 3}\nu_{3\pi})}$$

$$2\mu_t = \frac{E_\pi}{\nu_\pi + 1} \qquad 2\mu_l = G_3$$

A.2 Changement de repère pour un loi transversalement isotrope

Dans cette section on montre comment arriver aux équations 4.65 et 4.66 du paragraphe 4.5.2 pour cas en notation tensoriel et notation vectoriel afin de bien vérifier les symétrie du tenseur.

Notation Tensorielle

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \mathbb{C}_{ijkh} \varepsilon_{kh} && \text{contrainte dans le repère local } (O, e_1, e_2, e_3) \\ \sigma_{\alpha\beta}^z &= \mathbb{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^z \varepsilon_{\gamma\delta}^z && \text{contrainte dans le repère global } (O, e_x, e_y, e_z)\end{aligned}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}^z &= R_{\alpha i} \sigma_{ij} R_{\beta j} &\longrightarrow& \sigma_{\alpha\beta}^z = R_{\alpha i} R_{\beta j} \mathbb{C}_{ijkh} \varepsilon_{kh} \\ \varepsilon_{kh} &= R_{\gamma k} \varepsilon_{\gamma\delta}^z R_{\delta l} &\longrightarrow& \sigma_{\alpha\beta}^z = (R_{\alpha i} R_{\beta j} R_{\gamma k} R_{\delta h} \mathbb{C}_{ijkh}) \varepsilon_{\gamma\delta}^z\end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\boxed{\mathbb{C}_{\alpha\beta\gamma\delta}^z = R_{\alpha i} R_{\beta j} R_{\gamma k} R_{\delta h} \mathbb{C}_{ijkh}} \quad (\text{A.3})$$

Notation Vectoriel

$$\sigma_{ij}^z = R_{ik} \sigma_{kp} R_{jp} = \begin{cases} \sigma_{33}^z = \sigma_{33}^3 \cos^2\alpha + \sigma_{22}^3 \sin^2\alpha - 2\sigma_{23}^3 \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \sigma_{22}^z = \sigma_{22}^3 \cos^2\alpha + \sigma_{33}^3 \sin^2\alpha + 2\sigma_{23}^3 \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ \sigma_{11}^z = \sigma_{11}^3 \\ \sigma_{13}^z = \sigma_{13}^3 \cos\alpha - \sigma_{12}^3 \sin\alpha \\ \sigma_{12}^z = +\sigma_{13}^3 \sin\alpha + \sigma_{12}^3 \cos\alpha \\ \sigma_{23}^z = -\sigma_{22}^3 \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_{33}^3 \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \\ \quad + \sigma_{23}^3 (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Nous pouvons récrire σ_{ij}^z en forme vectorielle dans la façon suivant :

$$\sigma_i^z = \mathbb{R}_{ij} \sigma_j$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^z \\ \sigma_{22}^z \\ \sigma_{33}^z \\ \sigma_{23}^z \\ \sigma_{13}^z \\ \sigma_{12}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & +2\cos\alpha\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\cos\alpha\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

En faisant le même calcul pour la déformation nous récrivons la même équation afin de trouver la matrice C_{ij}^z

$$\begin{aligned}\sigma_i^z &= \mathbb{R}_{ij} \sigma_j & \varepsilon_i^z &= \mathbb{R}_{ij} \varepsilon_j \\ \sigma_i^z &= C_{ij}^z \varepsilon_j^z & \sigma_i &= C_{ij} \varepsilon_j & \longrightarrow & \mathbb{R}_i^{-1} \sigma^z = C (\mathbb{R}^{-1} \varepsilon^z)\end{aligned}$$

En utilisant le paramétré mécanique de l'équation (numéro) on montre le composantes de la matrice C_{ij}

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{55} \end{bmatrix}_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sigma_i^z &= (\mathbb{R}_{ih} C_{hk} \mathbb{R}_{kj}^{-1}) \varepsilon_j^z \\ \boxed{C_{ij}^z &= (\mathbb{R}_{ih} C_{hk} \mathbb{R}_{kj}^{-1})} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ci-dessus nous écrivons toutes les composantes du tenseur \mathbb{C}_{ijkl}^z et C_{ij}^z

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{1111}^z &= C_{11}^z = A_1 = B \\ \mathbb{C}_{1122}^z &= C_{12}^z = A_{13} \cdot \sin^2 \alpha + A_{12} \cdot \cos^2 \alpha = C \\ \mathbb{C}_{1133}^z &= C_{13}^z = A_{13} \cdot \cos^2 \alpha + A_{12} \cdot \sin^2 \alpha = D \\ \mathbb{C}_{1112}^z &= C_{16}^z = 0 \\ \mathbb{C}_{1113}^z &= C_{15}^z = 0 \\ \mathbb{C}_{1123}^z &= C_{14}^z = \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (A_{13} - A_{12}) = E \\ \\ \mathbb{C}_{2211}^z &= C_{21}^z = A_{13} \cdot \sin^2 \alpha + A_{12} \cdot \cos^2 \alpha = C \\ \mathbb{C}_{2222}^z &= C_{22}^z = A_3 \cdot \sin^4 \alpha + A_1 \cdot \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (4A_4 + 2A_{13}) = H \\ \mathbb{C}_{2233}^z &= C_{23}^z = A_{13} \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (A_1 + A_3 - 4A_4) = I \\ \mathbb{C}_{2212}^z &= C_{26}^z = 0 \\ \mathbb{C}_{2213}^z &= C_{25}^z = 0 \\ \mathbb{C}_{2223}^z &= C_{24}^z = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \\ &\quad [(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (2A_4 + A_{13}) - A_3 \cdot \sin^2 \alpha + A_1 \cdot \cos^2 \alpha] = L \\ \\ \mathbb{C}_{3311}^z &= C_{31}^z = A_{13} \cdot \cos^2 \alpha + A_{12} \cdot \sin^2 \alpha = D \\ \mathbb{C}_{3322}^z &= C_{32}^z = A_{13} \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (A_1 + A_3 - 4A_4) = I \\ \mathbb{C}_{3333}^z &= C_{33}^z = A_1 \cdot \sin^4 \alpha + A_3 \cdot \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (4A_4 + 2A_{13}) = P \\ \mathbb{C}_{3312}^z &= C_{36}^z = 0 \\ \mathbb{C}_{3313}^z &= C_{35}^z = 0 \\ \mathbb{C}_{3323}^z &= C_{34}^z = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot [(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (2A_4 + A_{13}) - A_1 \sin^2 \alpha + A_3 \cos^2 \alpha] = Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{1311}^z &= C_{51}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{1322}^z &= C_{52}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{1333}^z &= C_{53}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{1312}^z &= C_{56}^z = -\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (A_5 - A_4) = N \\
\mathbb{C}_{1313}^z &= C_{55}^z = A_5 \cdot \sin^2\alpha + A_4 \cdot \cos^2\alpha = M \\
\mathbb{C}_{1323}^z &= C_{54}^z = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{1211}^z &= C_{61}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{1222}^z &= C_{62}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{1233}^z &= C_{63}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{1212}^z &= C_{66}^z = A_4 \cdot \sin^2\alpha + A_5 \cdot \cos^2\alpha = O \\
\mathbb{C}_{1213}^z &= C_{65}^z = -\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (A_5 - A_4) = N \\
\mathbb{C}_{1223}^z &= C_{64}^z = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{2311}^z &= C_{41}^z = \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (A_{13} - A_{12}) = E \\
\mathbb{C}_{2322}^z &= C_{42}^z = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \\
&\quad [(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(2A_4 + A_{13}) - A_3 \cdot \sin^2\alpha + A_1 \cdot \cos^2\alpha] = L \\
\mathbb{C}_{2333}^z &= C_{43}^z = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot [(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(2A_4 + A_{13}) - A_1 \sin^2\alpha + A_3 \cos^2\alpha] = Q \\
\mathbb{C}_{2312}^z &= C_{46}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{2313}^z &= C_{45}^z = 0 \\
\mathbb{C}_{2323}^z &= C_{44}^z = A_4 \cdot (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot (A_1 + A_3 - 2A_4 - 2A_{13}) = R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_{11}^z \\ \sigma_{22}^z \\ \sigma_{33}^z \\ \sigma_{23}^z \\ \sigma_{13}^z \\ \sigma_{12}^z \end{bmatrix}_i &= \begin{bmatrix} B & C & D & 2E & 0 & 0 \\ C & H & I & 2L & 0 & 0 \\ D & I & P & 2Q & 0 & 0 \\ E & L & Q & 2R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 2N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2N & 2O \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^z \\ \varepsilon_{22}^z \\ \varepsilon_{33}^z \\ \varepsilon_{23}^z \\ \varepsilon_{13}^z \\ \varepsilon_{12}^z \end{bmatrix}_j = \\
&= \begin{bmatrix} B & C & D & E & 0 & 0 \\ C & H & I & L & 0 & 0 \\ D & I & P & Q & 0 & 0 \\ E & L & Q & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N & O \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \gamma_{11}^z \\ \gamma_{22}^z \\ \gamma_{33}^z \\ \gamma_{23}^z \\ \gamma_{13}^z \\ \gamma_{12}^z \end{bmatrix}_j \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Avec $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$.

L'équation A.6 représente la loi transversalement isotrope dans le repère $Oe_xe_ye_z$.

Annexe B

Calculs numériques sur un cylindre creux

B.1 Solution du problème aux conditions au limits

B.1.1 Loi constitutive Plasol

Points en charge plastique, charge-décharge élastique

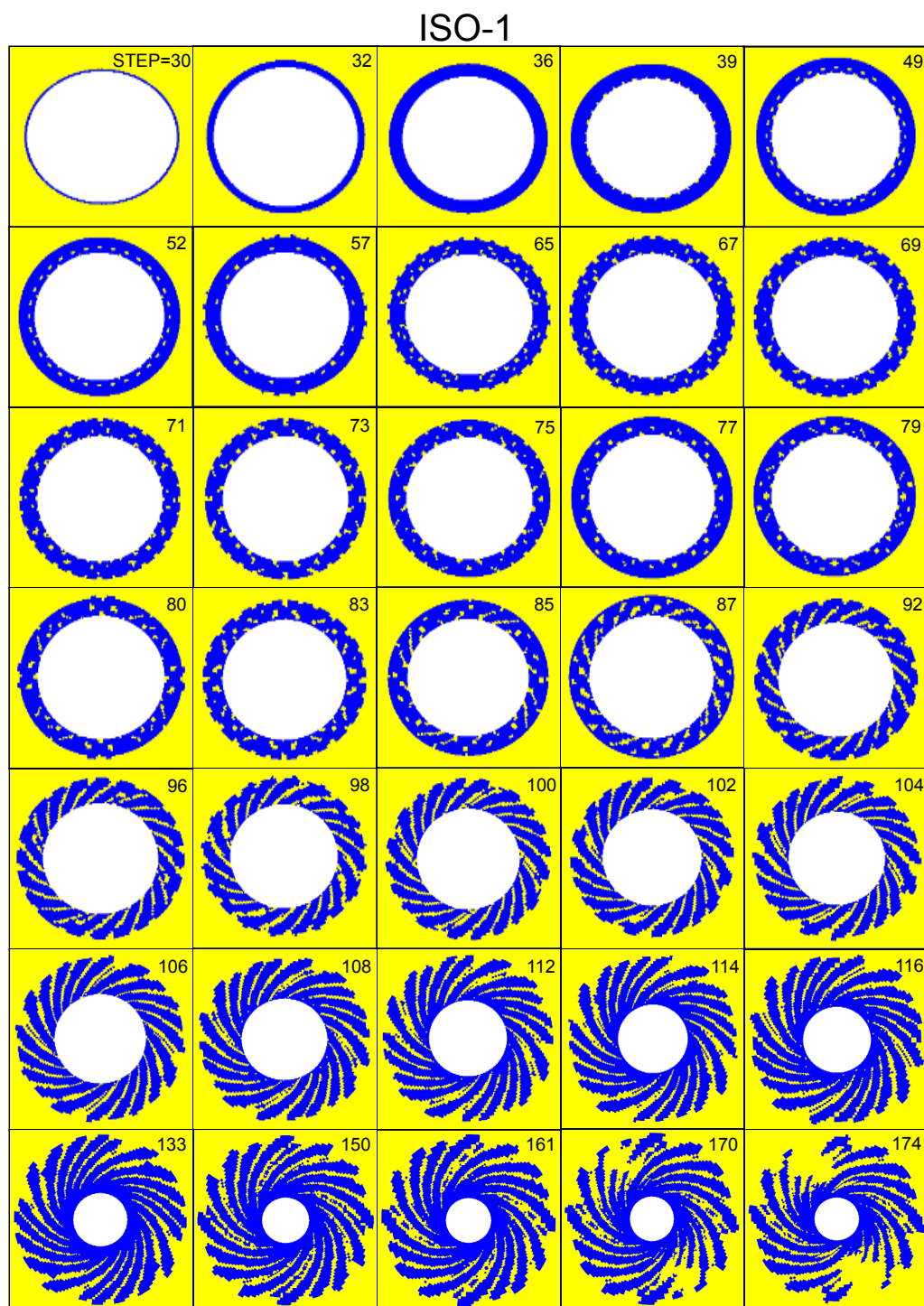


FIGURE B.1 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-1

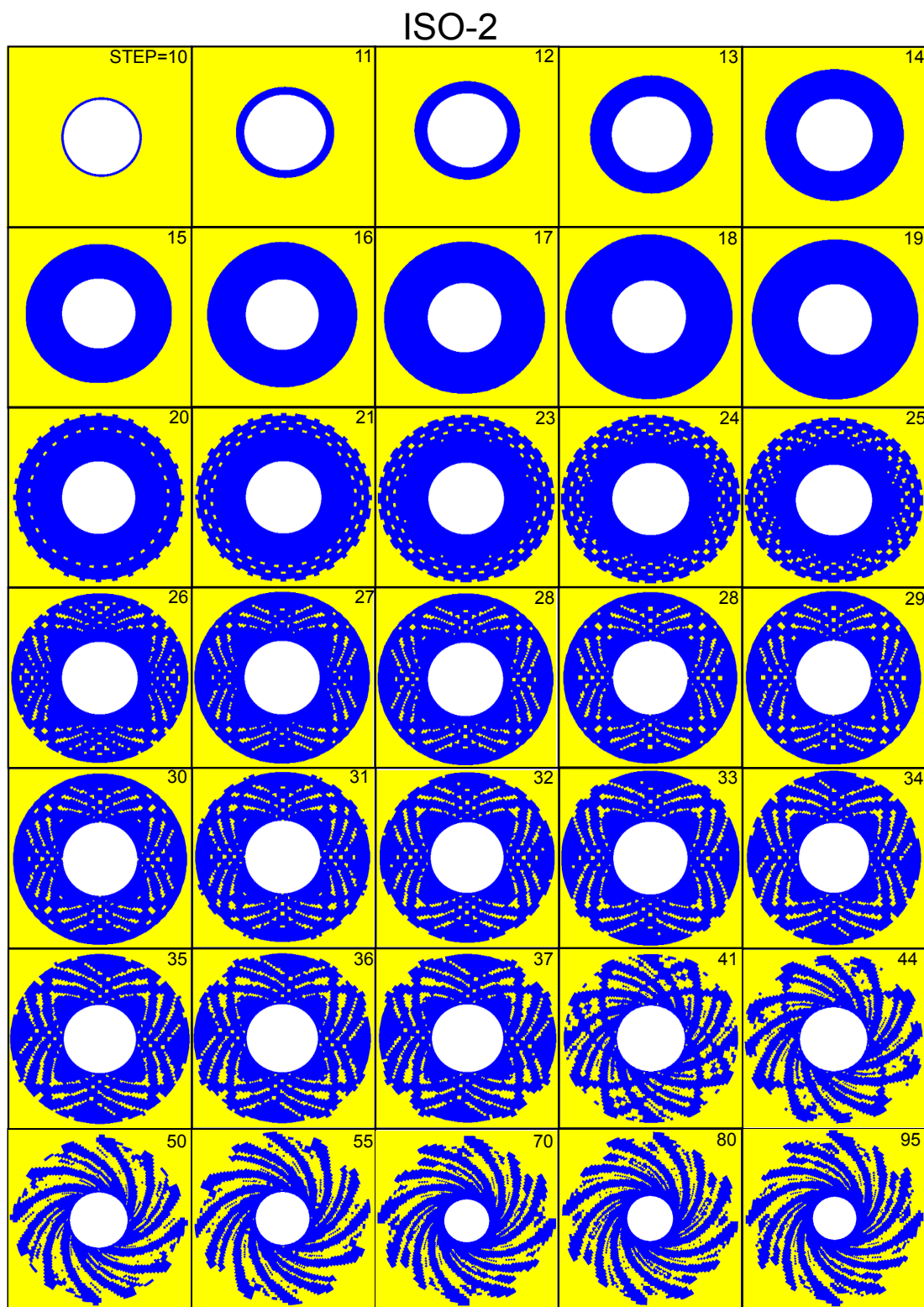


FIGURE B.2 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-2

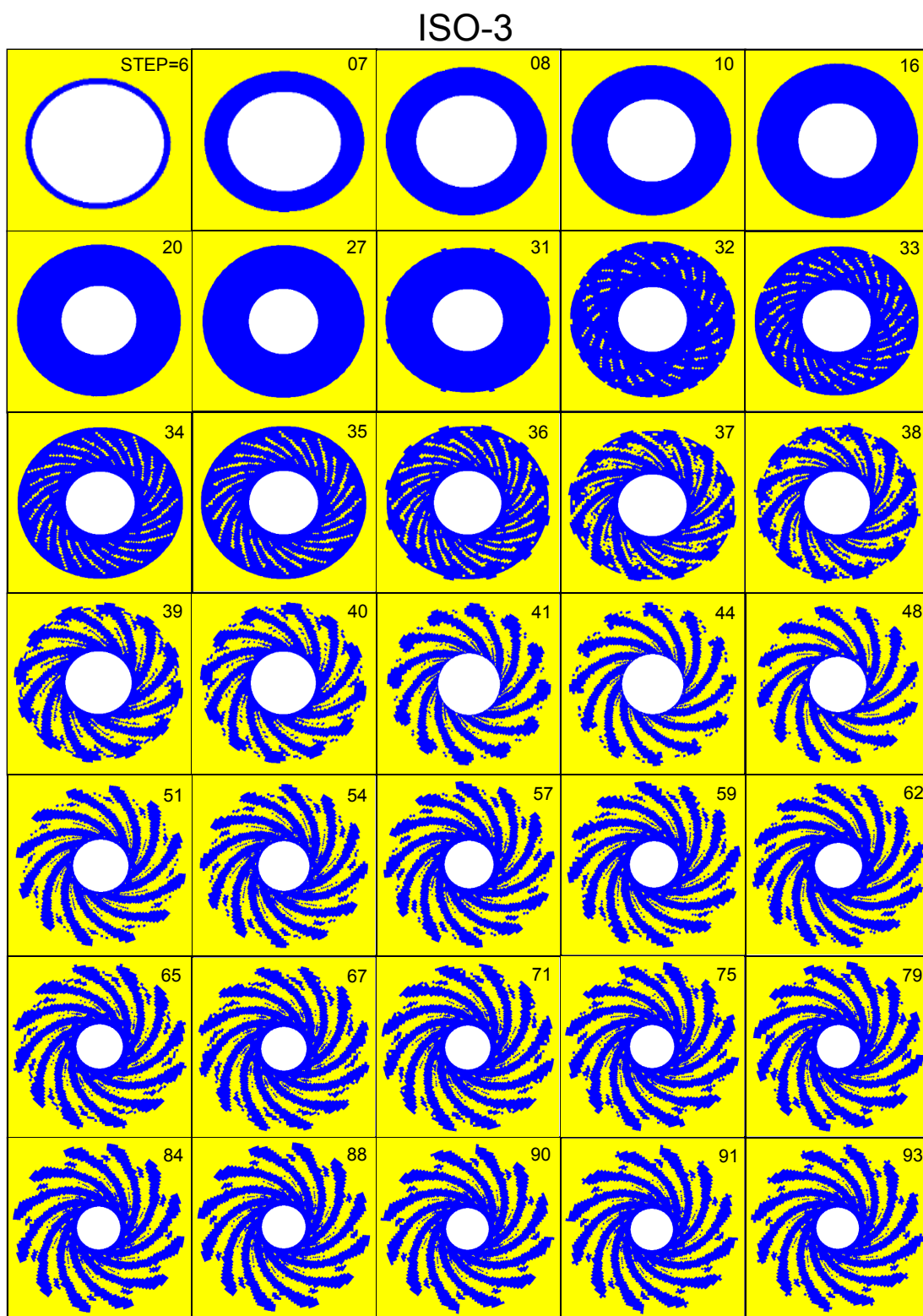


FIGURE B.3 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-3

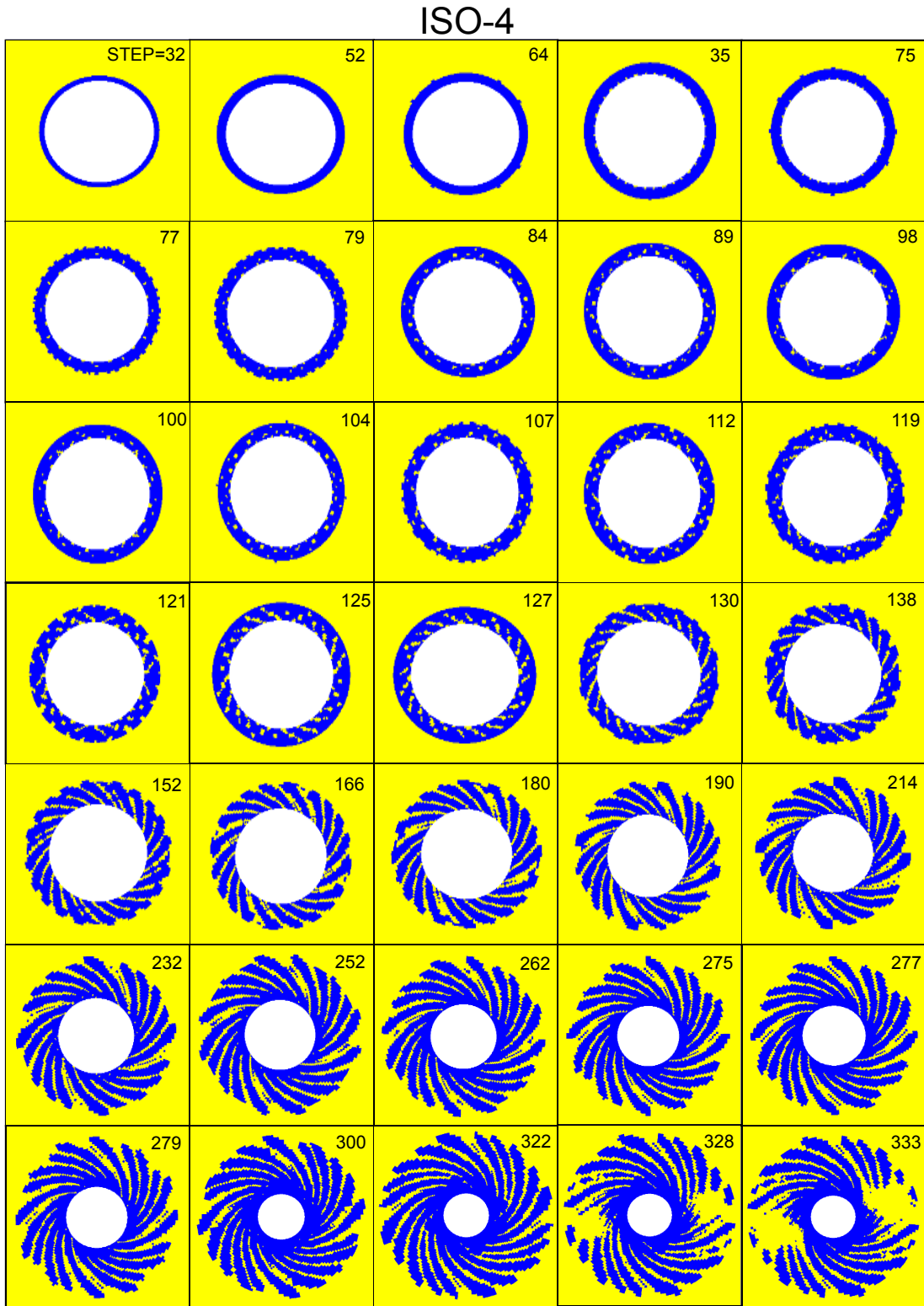


FIGURE B.4 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ISO-4

Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p

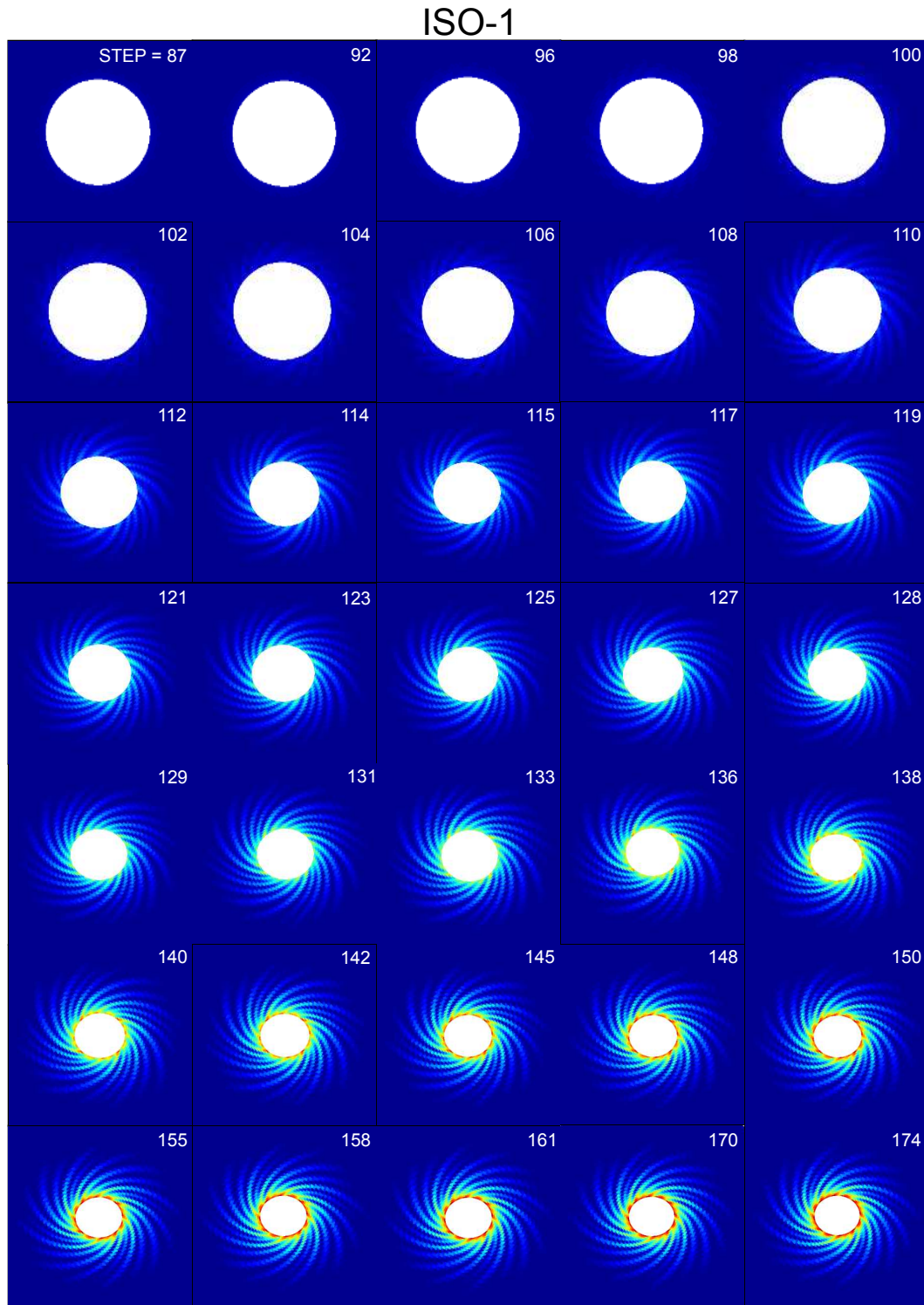


FIGURE B.5 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-1

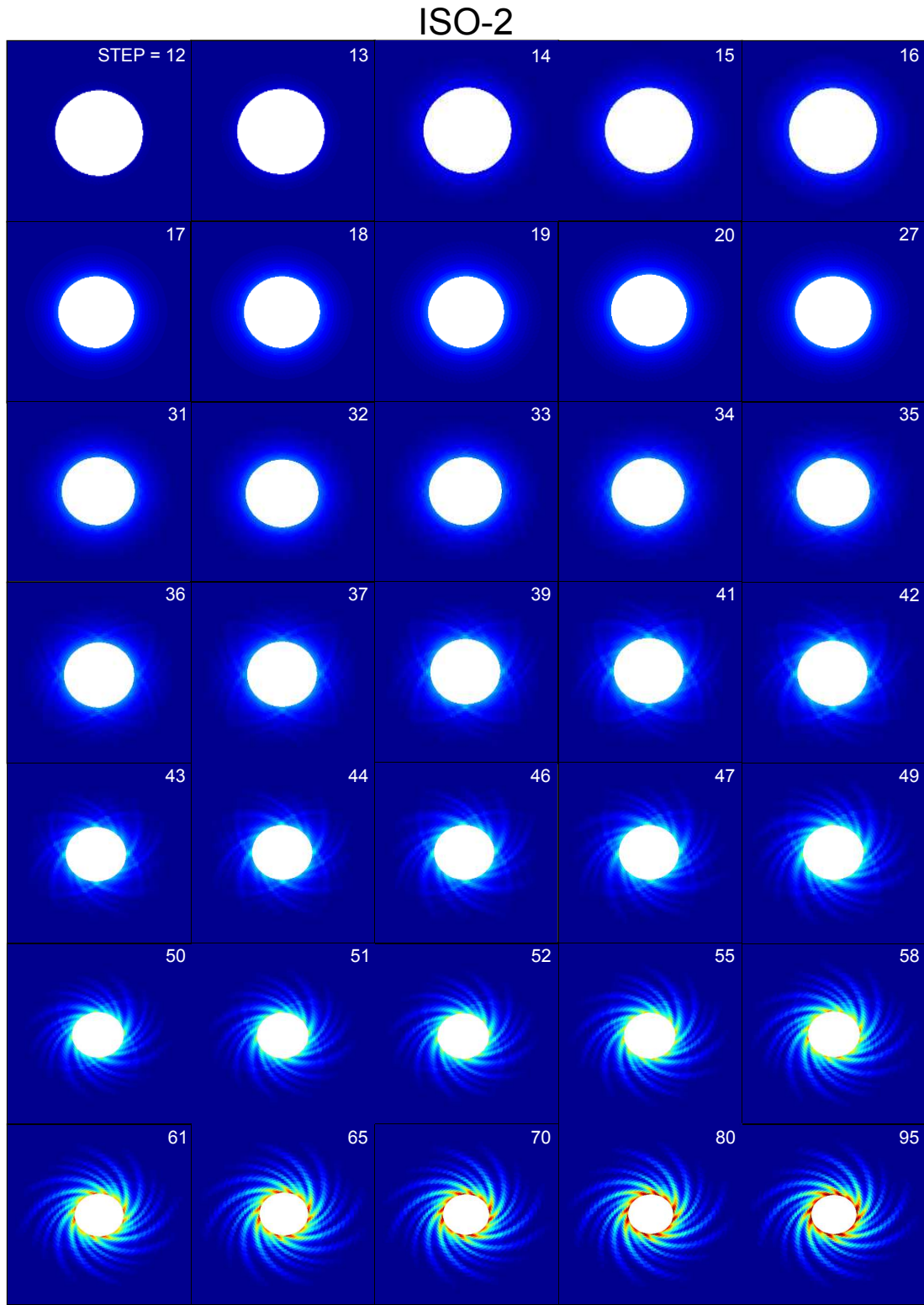


FIGURE B.6 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-2

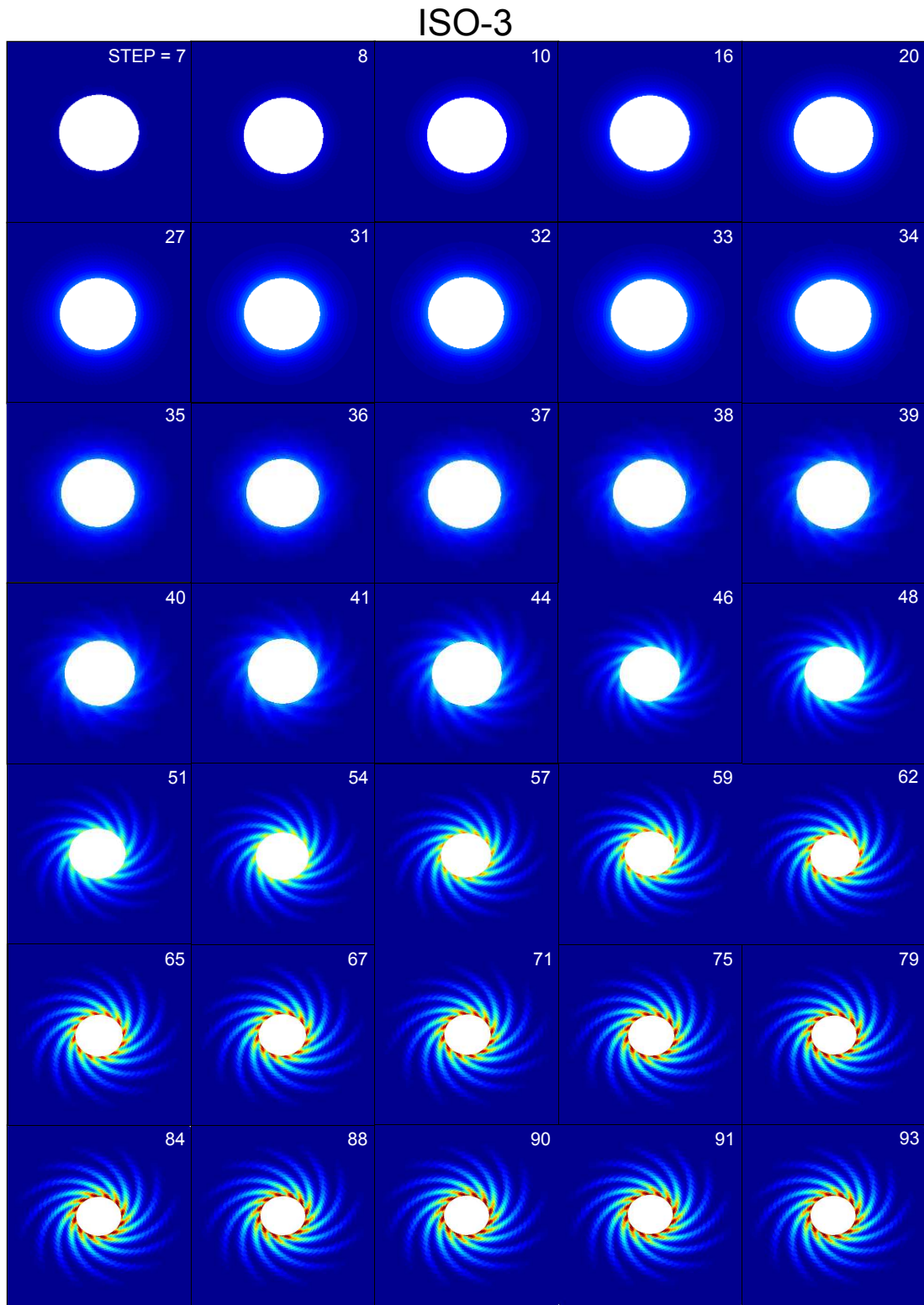


FIGURE B.7 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-3

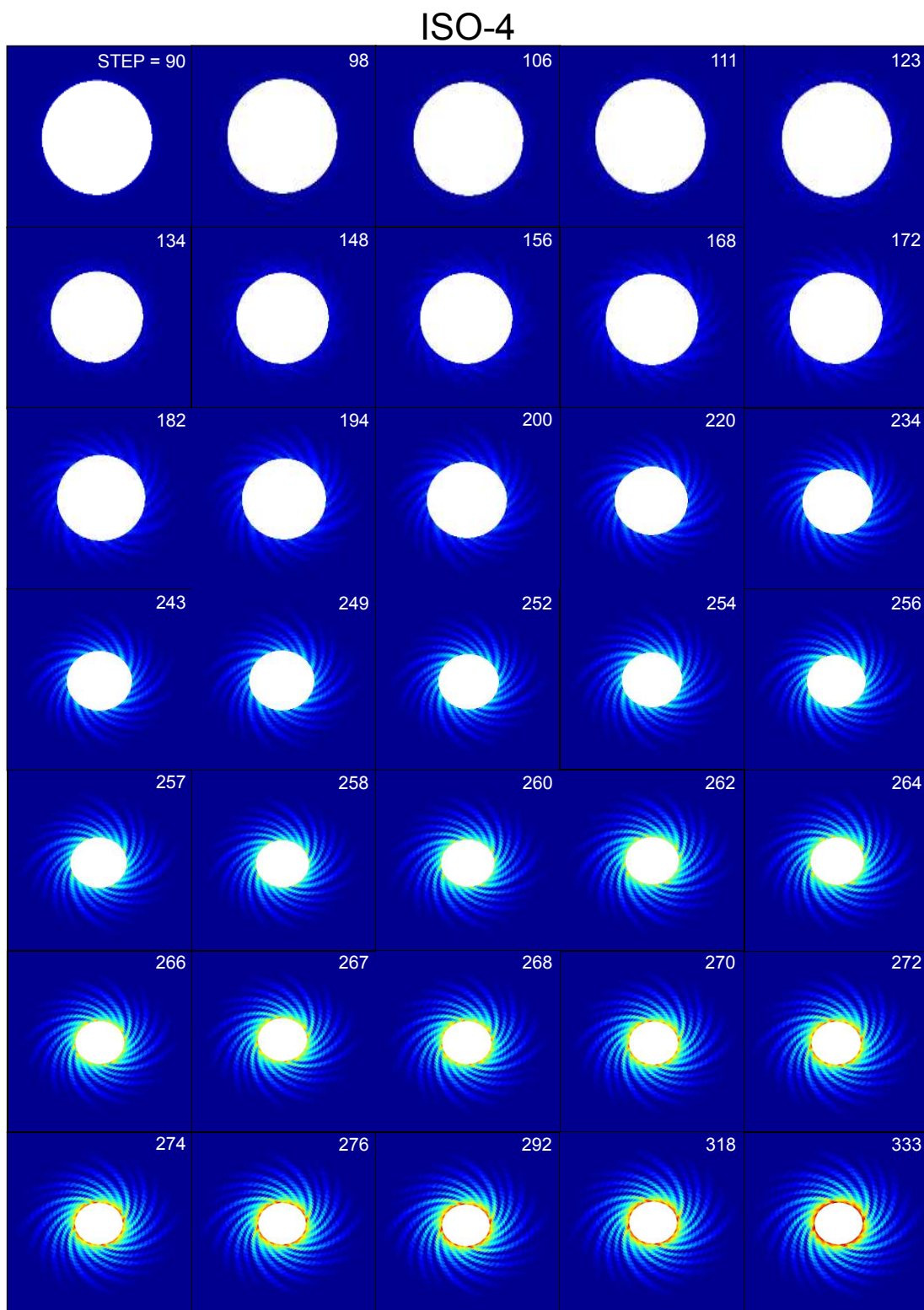


FIGURE B.8 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ISO-4

B.1.2 Profil de la pression d'eau

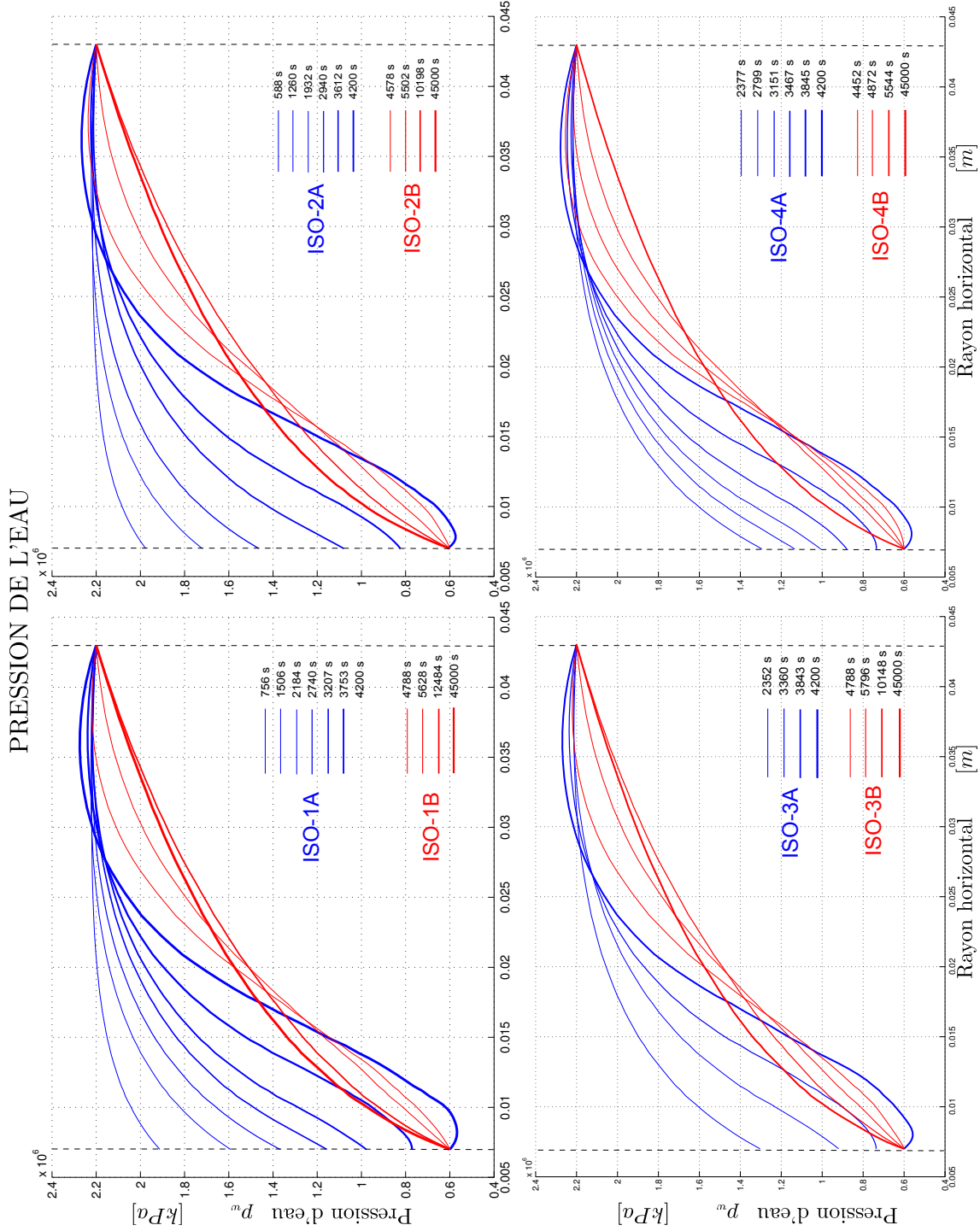


FIGURE B.9 – Profil de pressions d'eau pour les calculs ISO-1, ISO-2, ISO-3, ISO-4

B.1.3 Convergence des différents calculs

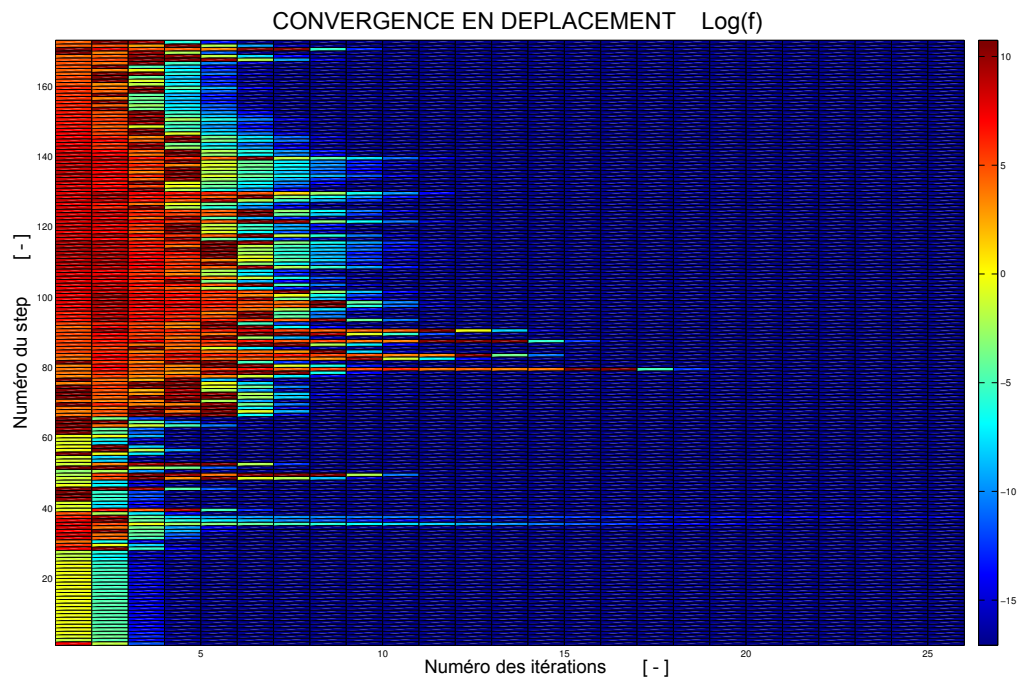


FIGURE B.10 – Convergence en force : calcul ISO-1A,B

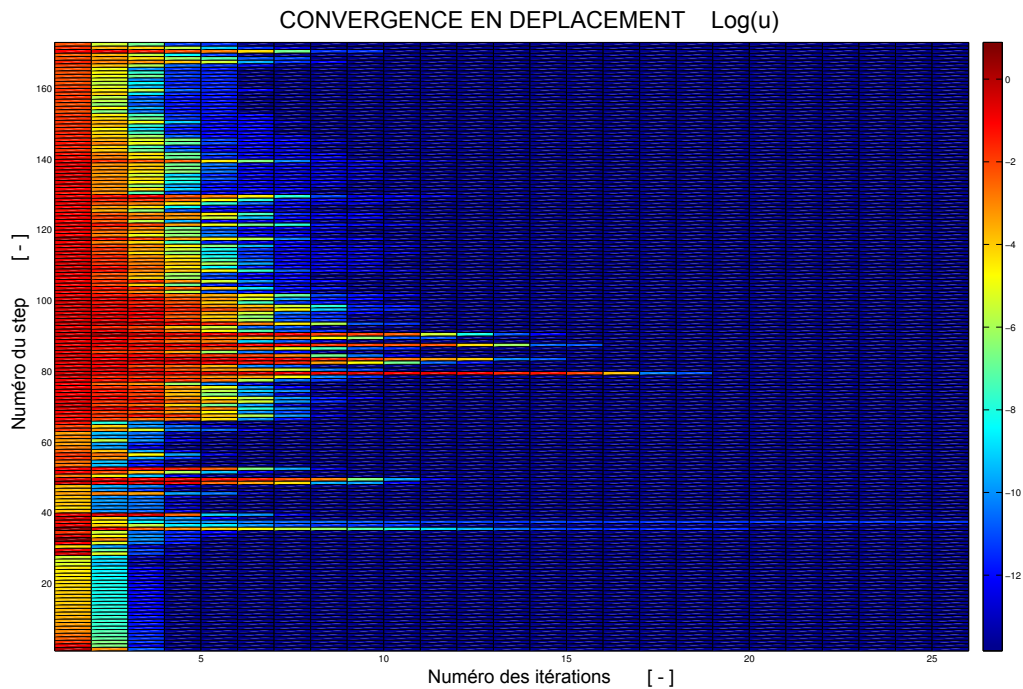


FIGURE B.11 – Convergence en déplacement : calcul ISO-1A,B

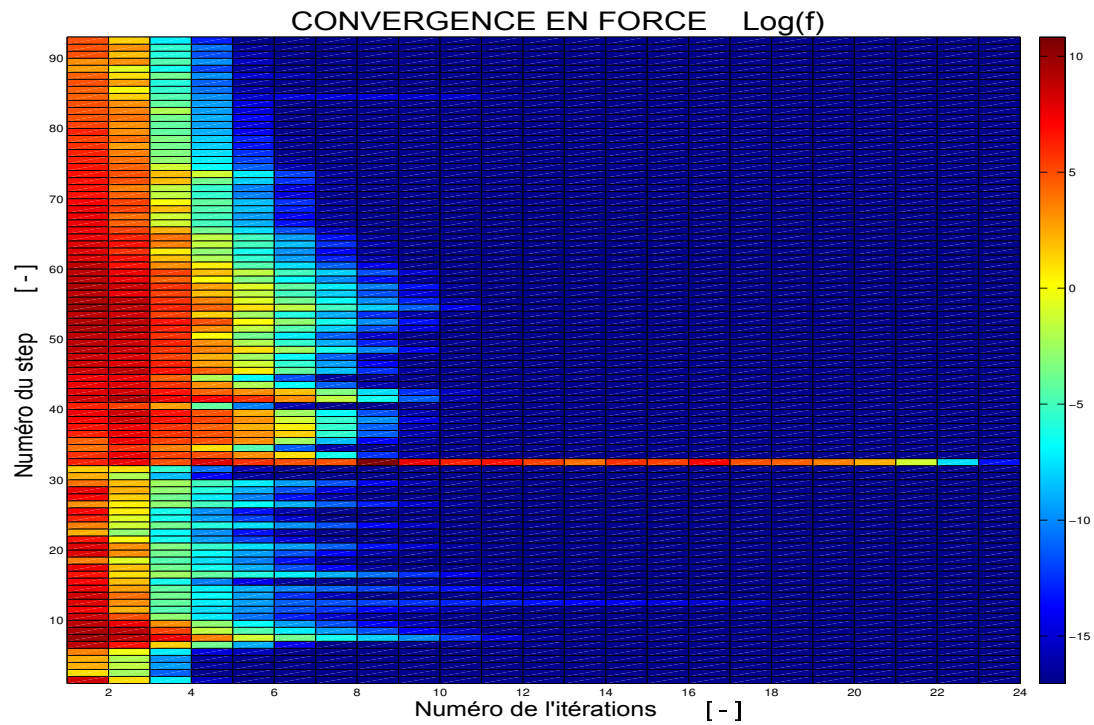


FIGURE B.12 – Convergence en force : calcul ISO-3A,B

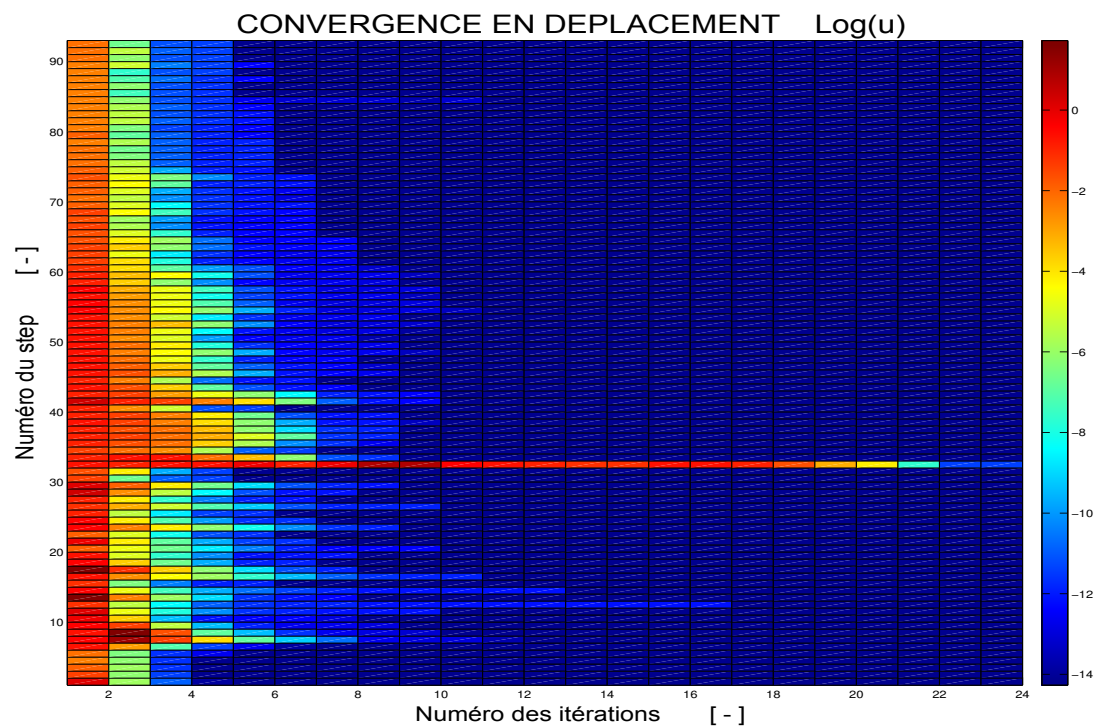


FIGURE B.13 – Convergence en déplacement : calcul ISO-3A,B

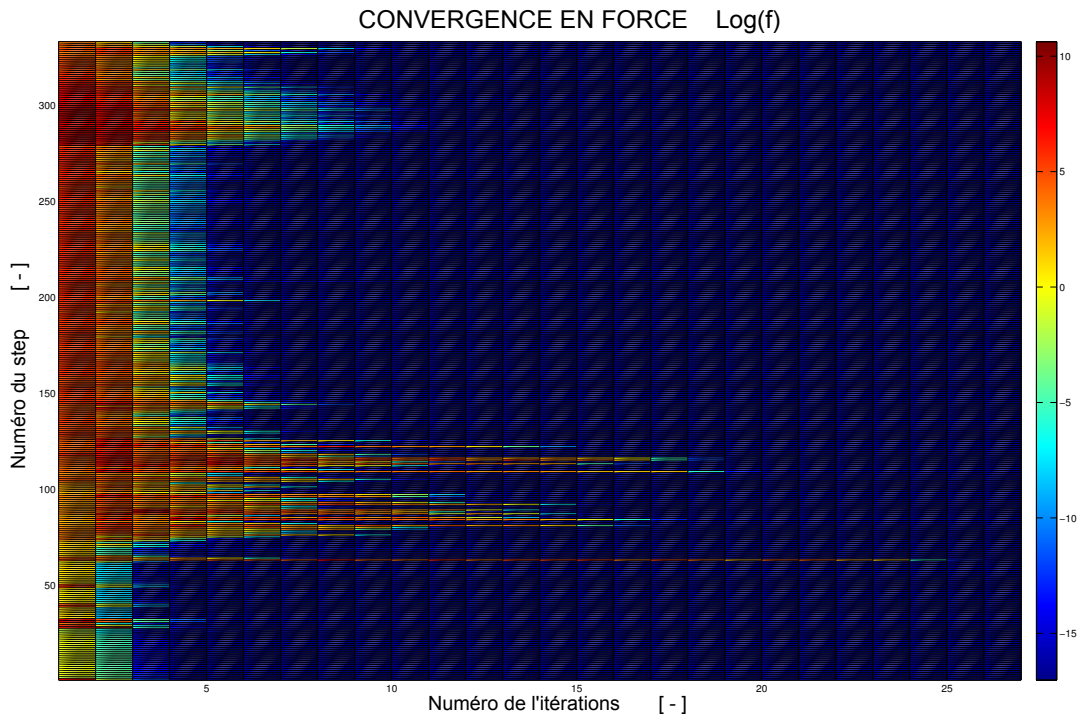


FIGURE B.14 – Convergence en force : calcul ISO-4A,B

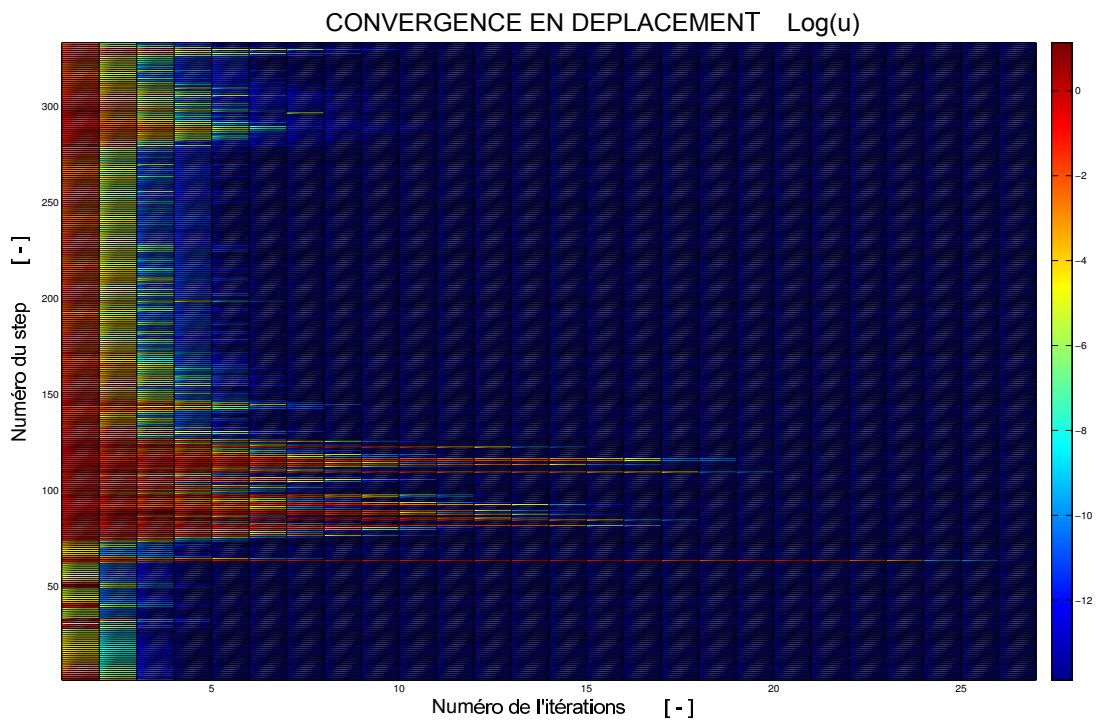


FIGURE B.15 – Convergence en déplacement : calcul ISO-4A,B

B.1.4 Loi constitutive Plasol anisotrope

Points en charge plastique, charge-décharge élastique

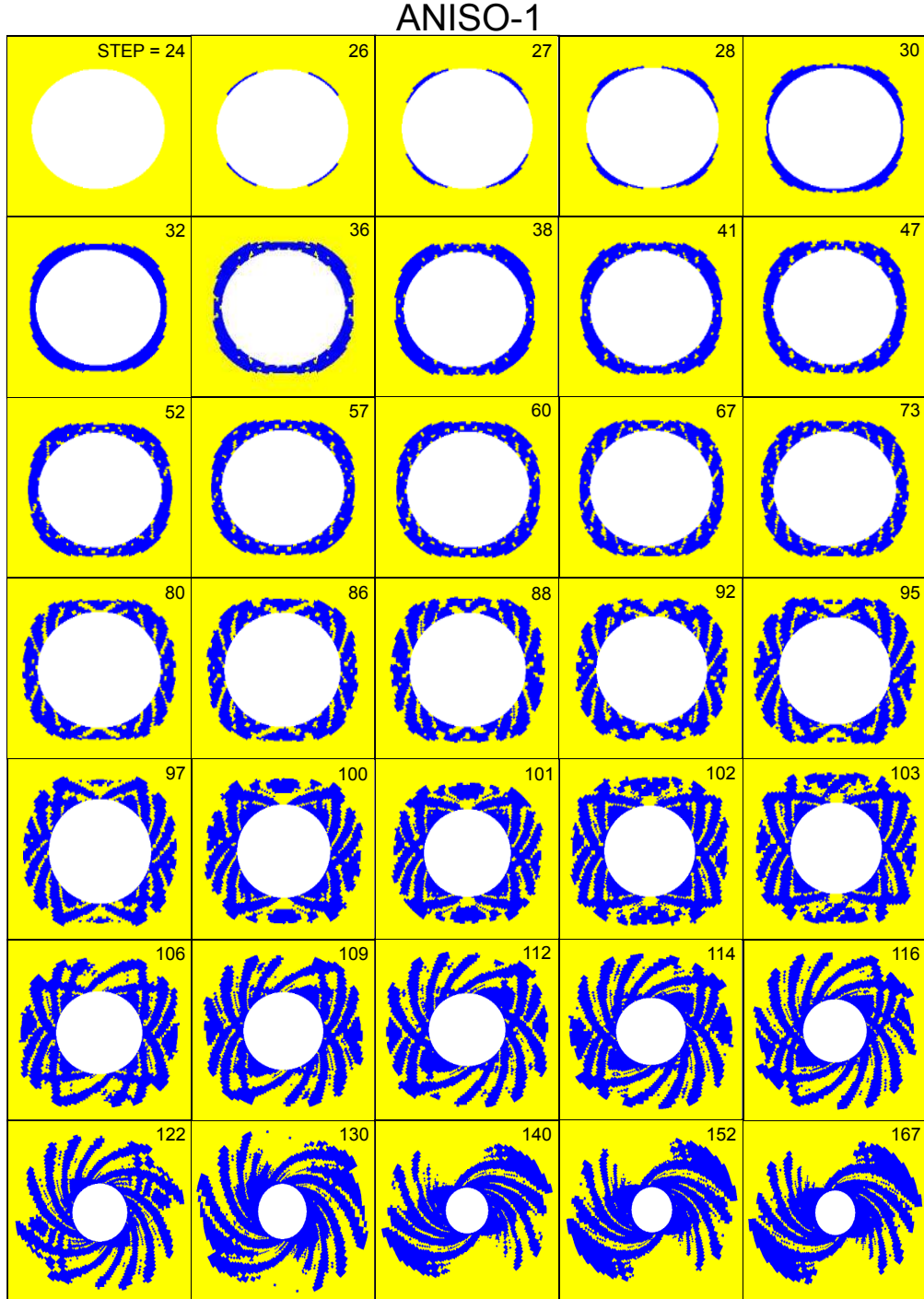


FIGURE B.16 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-1

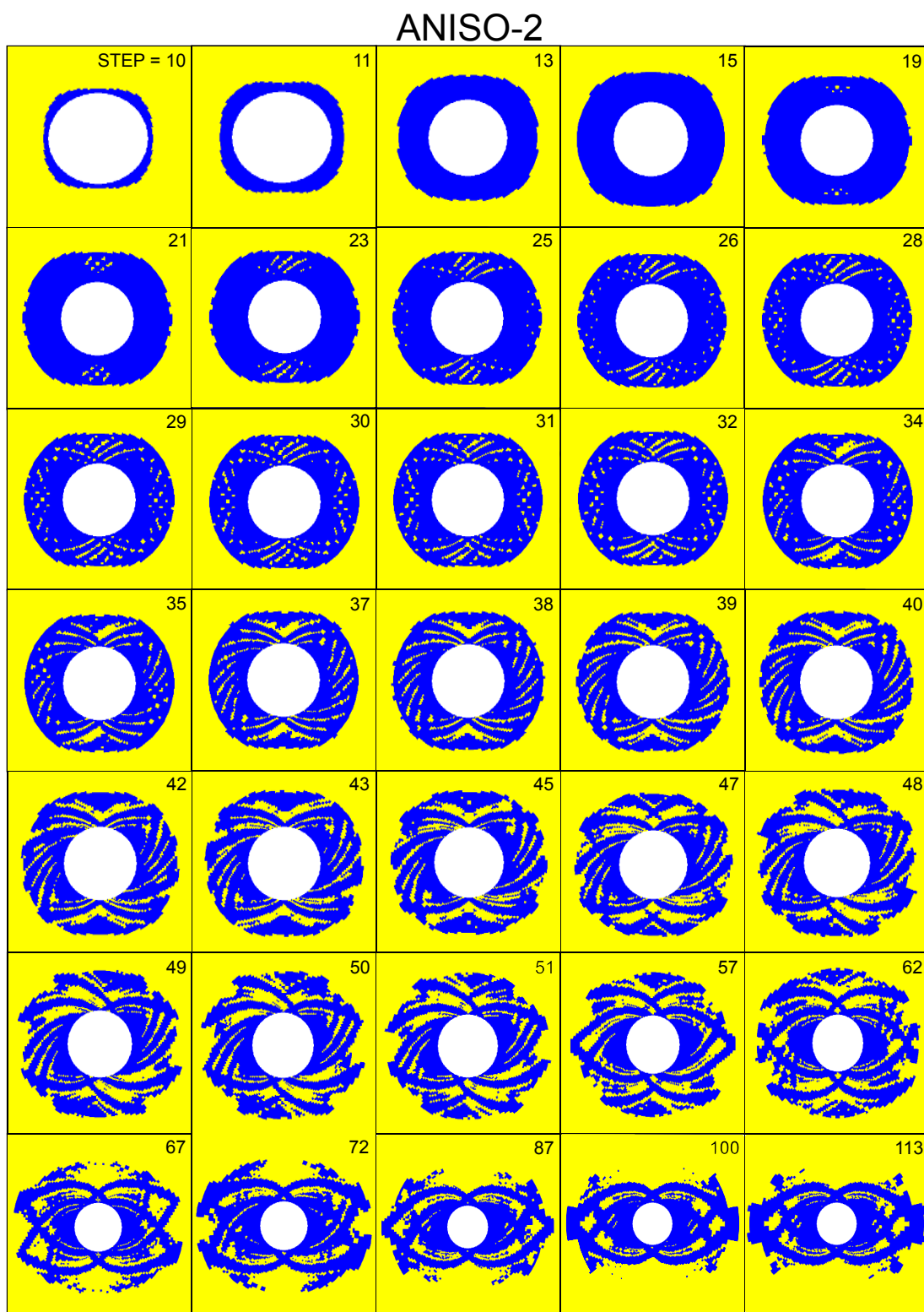


FIGURE B.17 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-2

ANISO-3

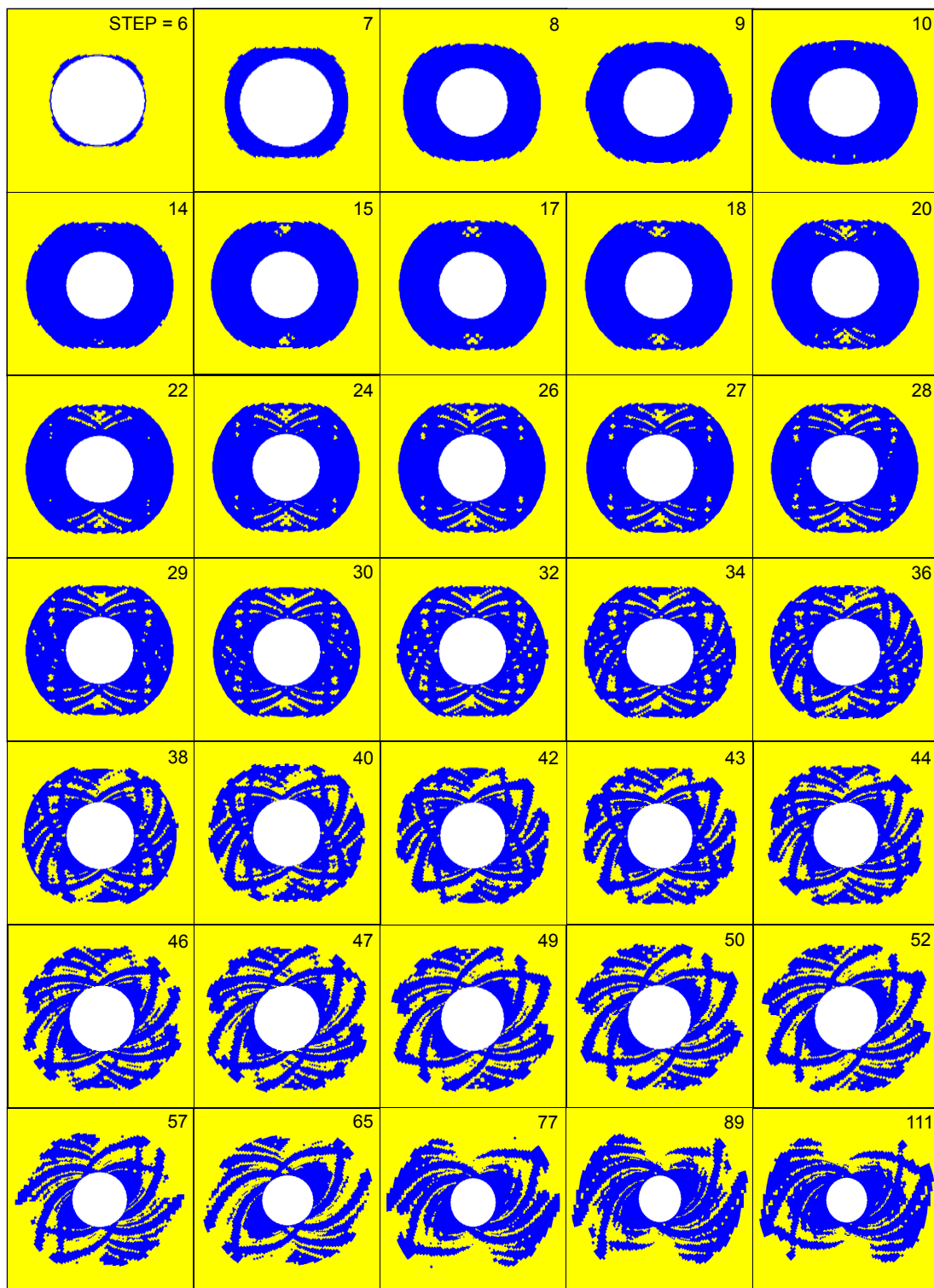


FIGURE B.18 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-3

ANISO-4

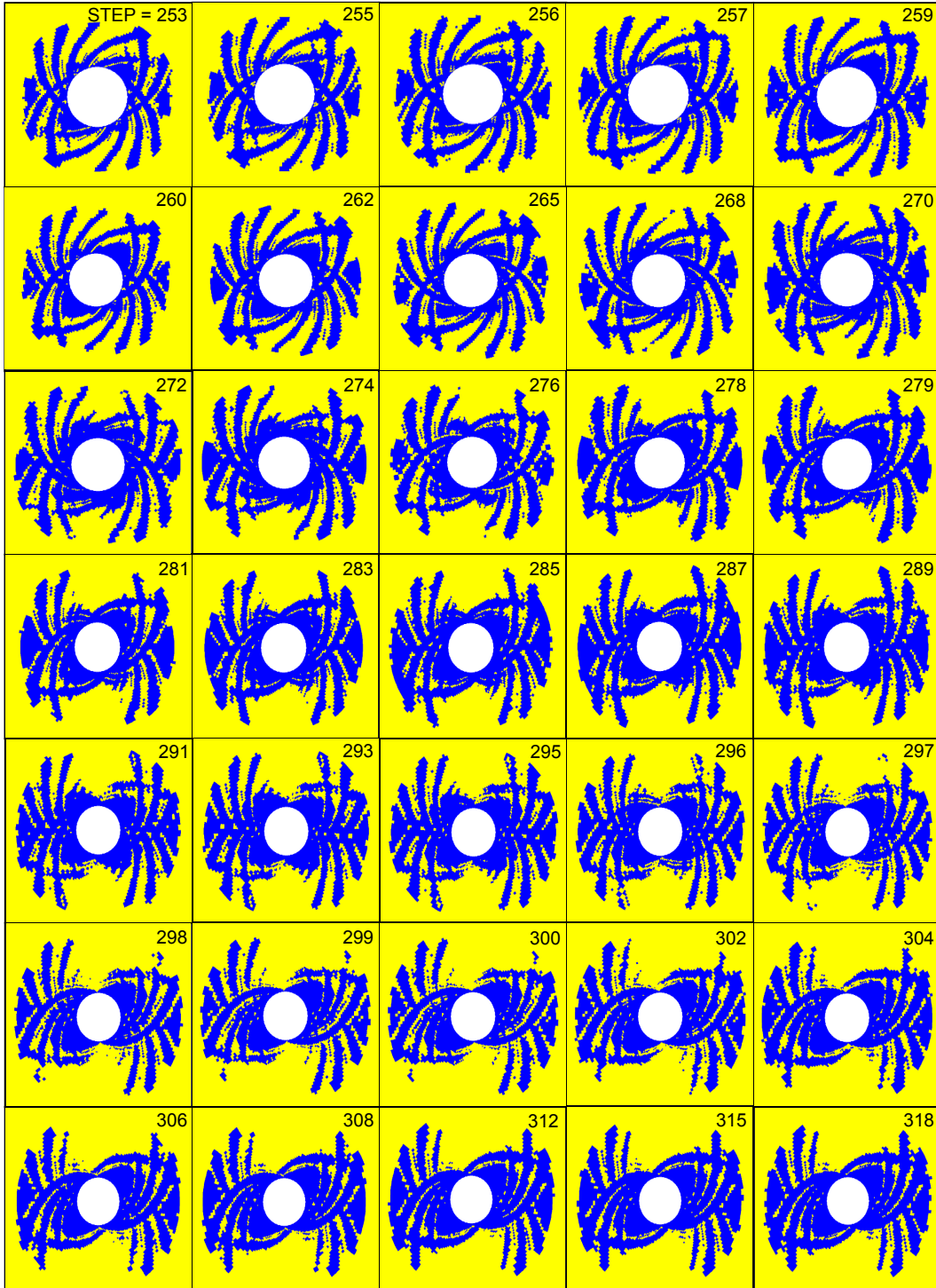


FIGURE B.19 – Points en charge plastique (en bleu), points en charge-décharge élastique (jaune) : calcul ANISO-4

Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p

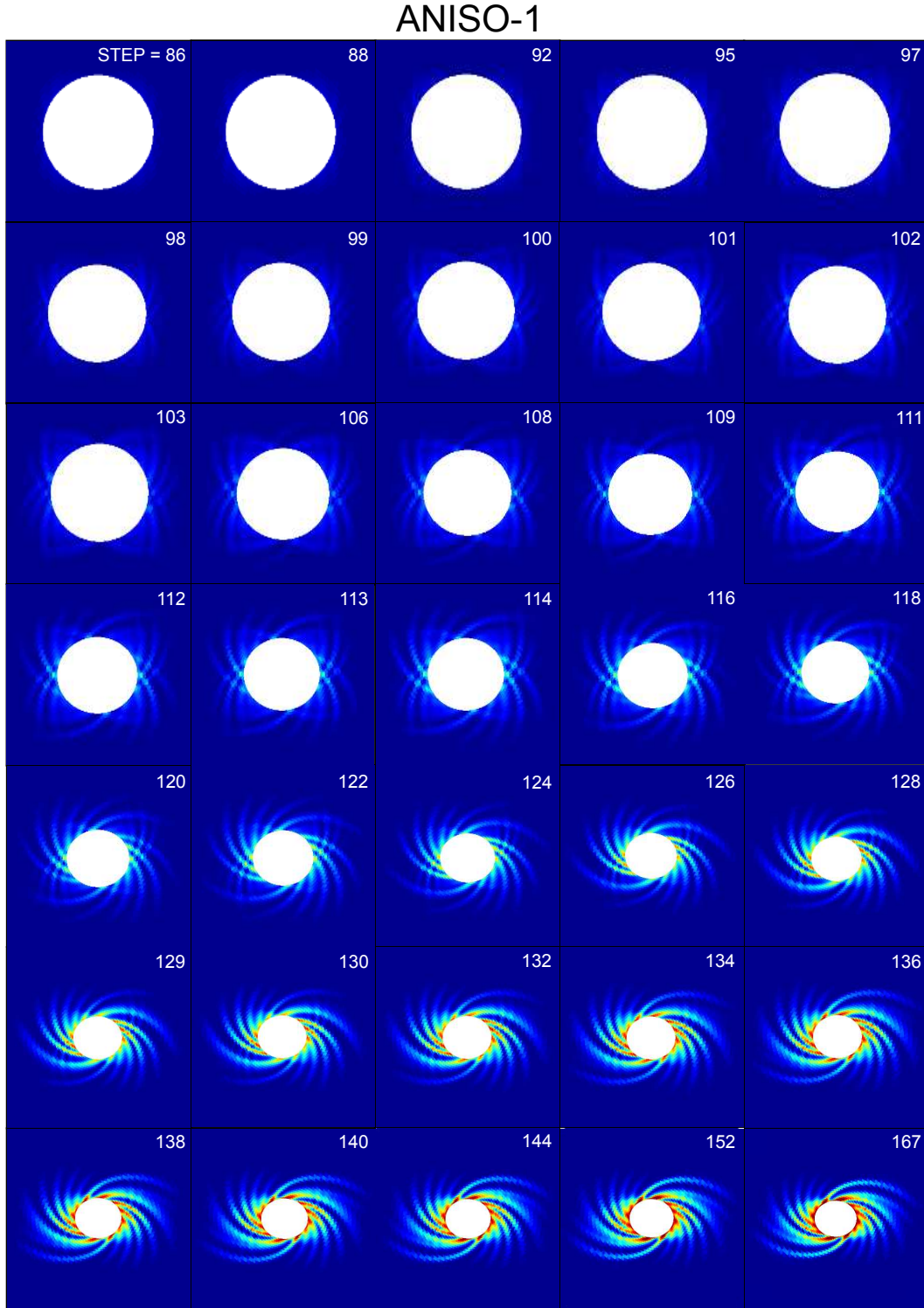


FIGURE B.20 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-1

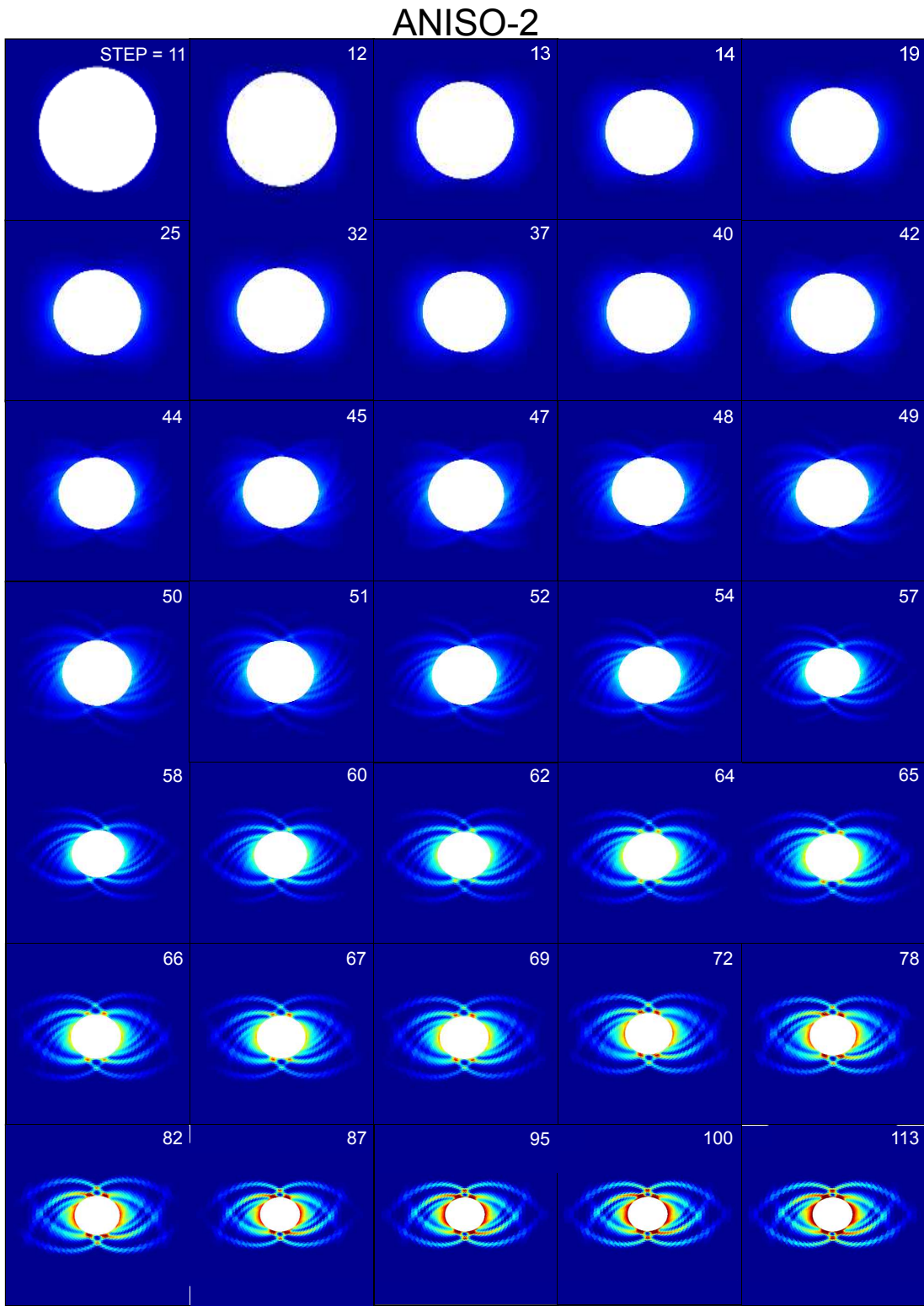


FIGURE B.21 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-2

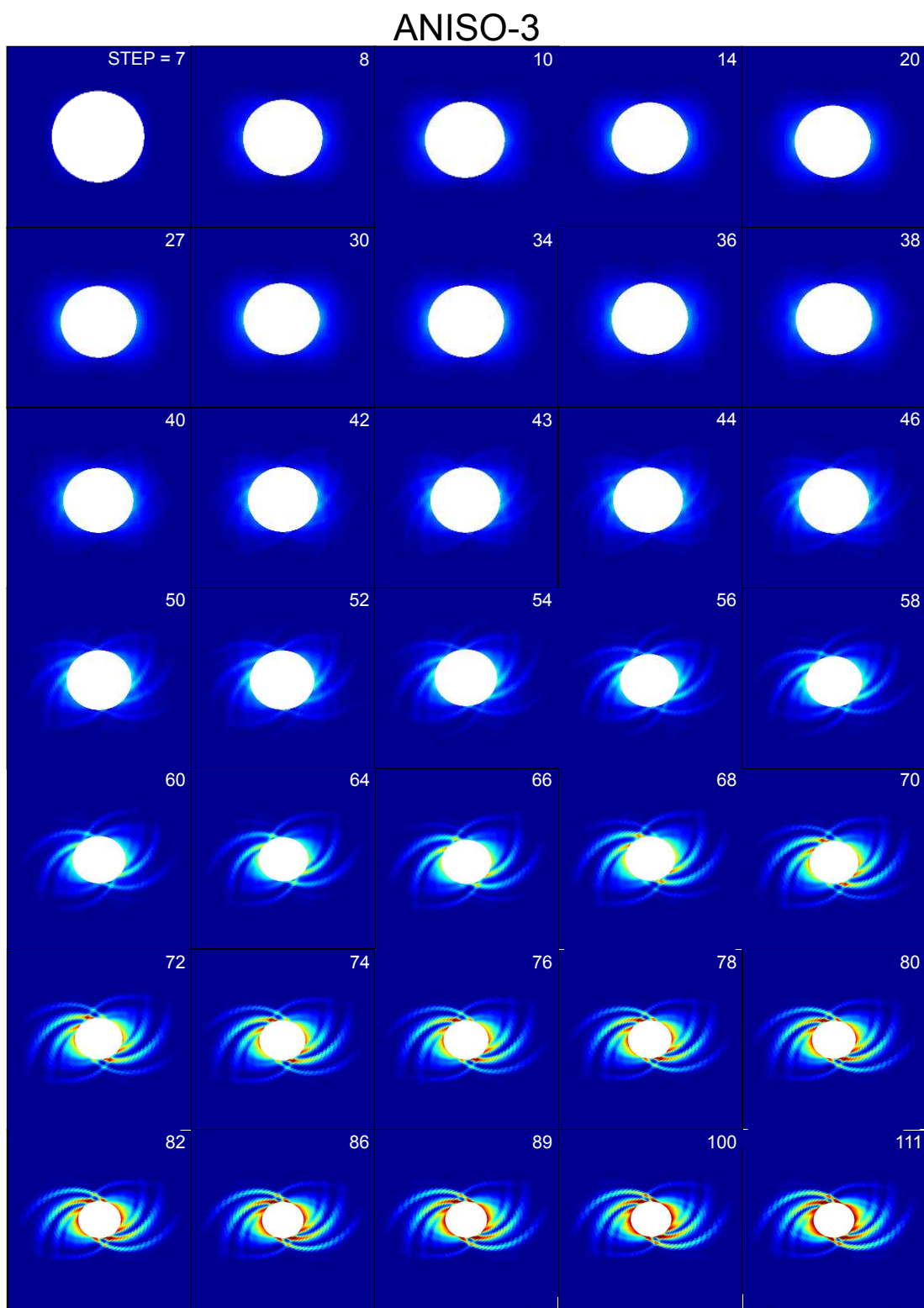


FIGURE B.22 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-3

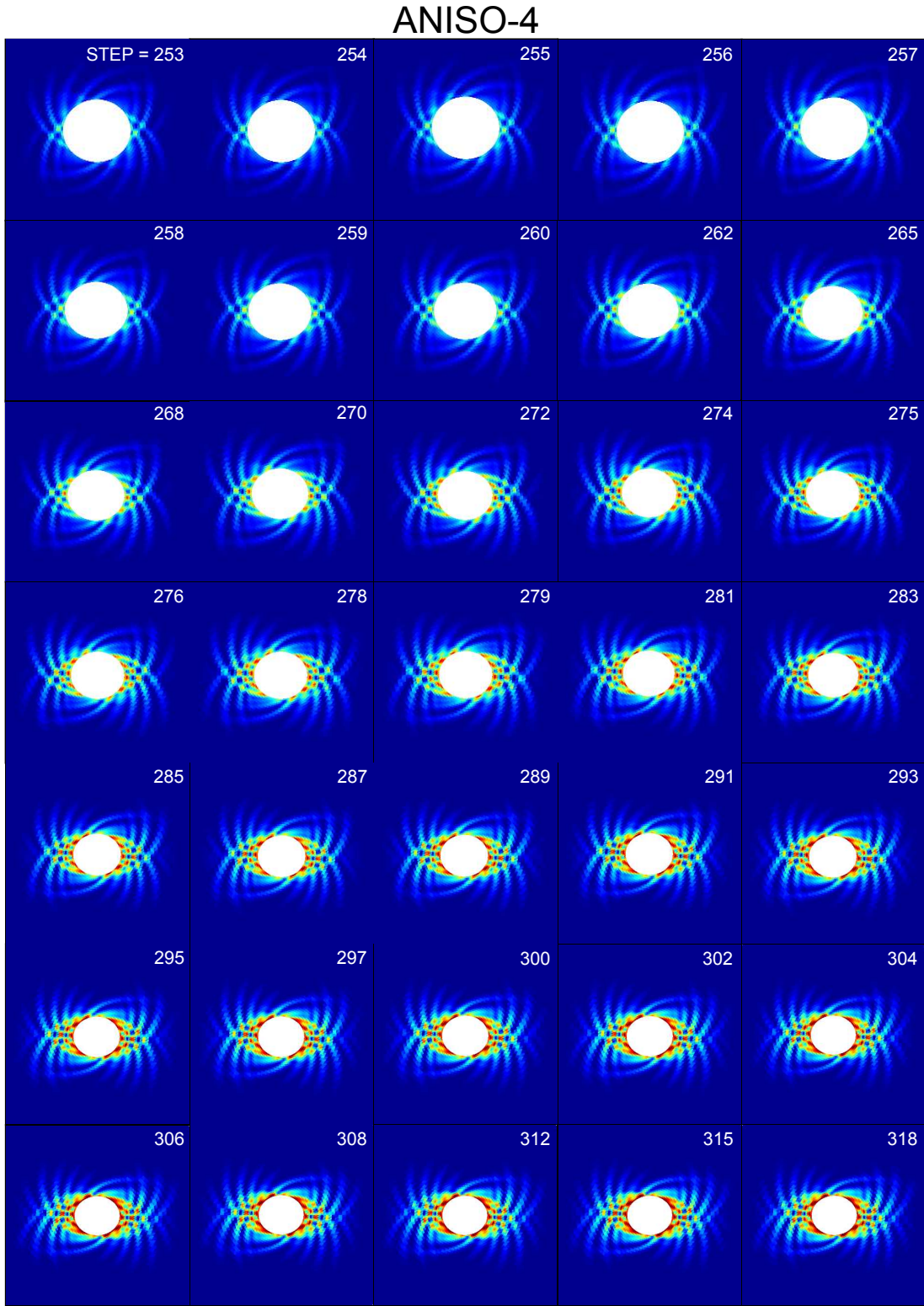


FIGURE B.23 – Déformation plastique équivalente ε_{eq}^p . Calcul ANISO-4

B.1.5 Profil de la pression d'eau

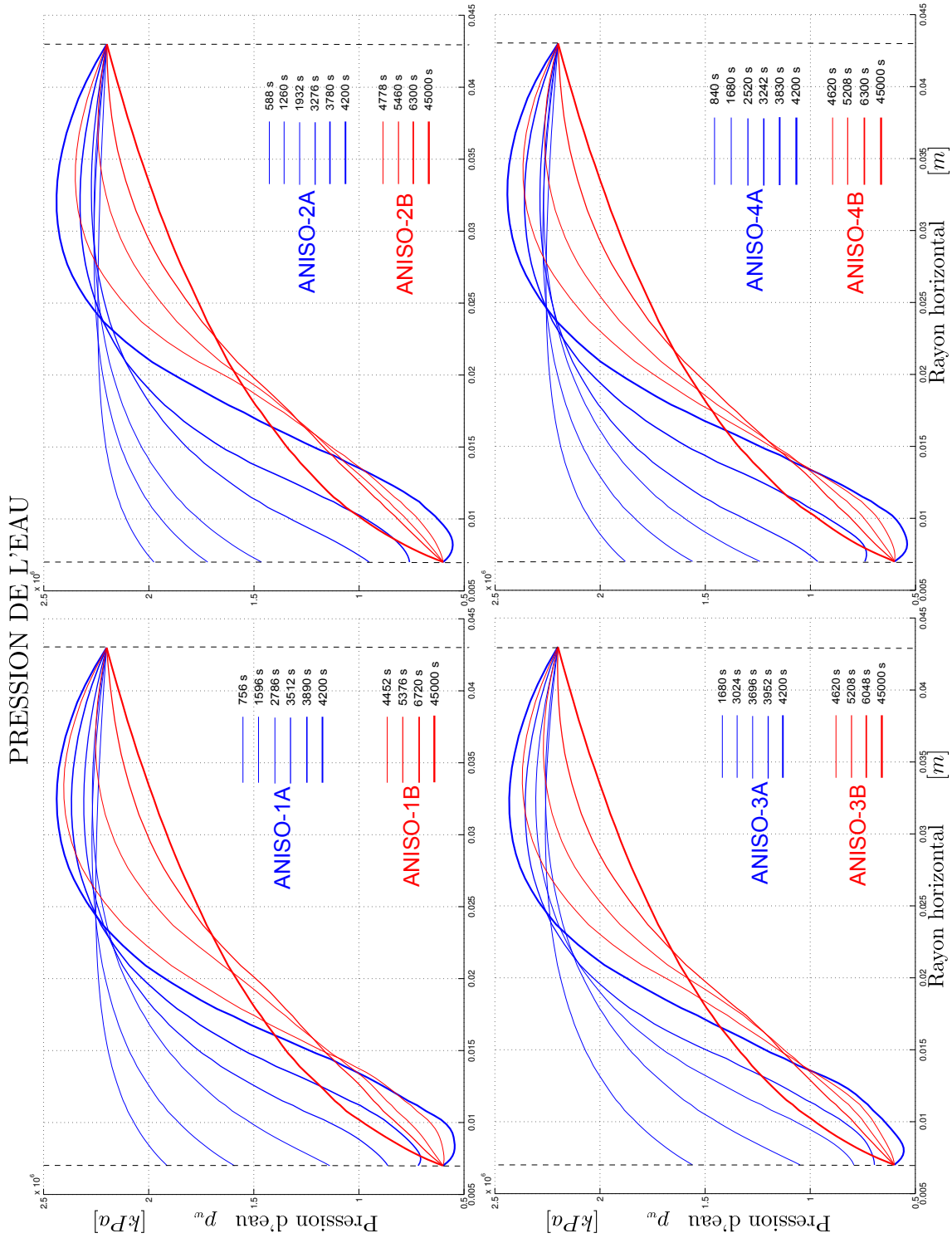


FIGURE B.24 – Profil de pressions d'eau pour les calculs ANISO-1, ANISO-2, ANISO-3, ANISO-4

B.1.6 Convergence des différents calculs

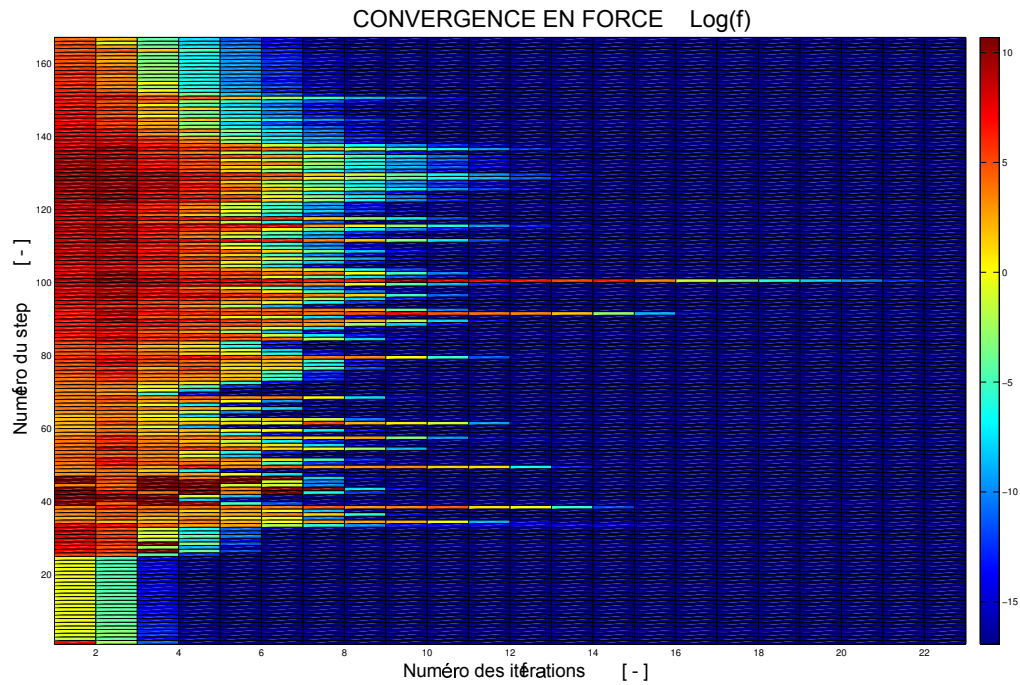


FIGURE B.25 – Convergence en force : calcul ANISO-1A,B

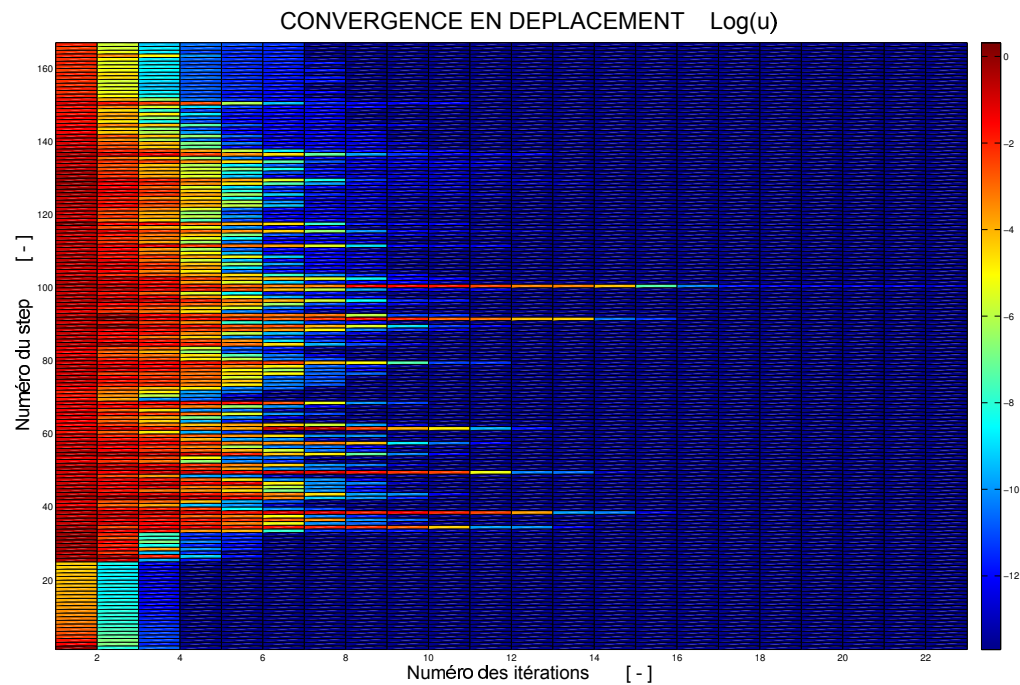


FIGURE B.26 – Convergence en déplacement : calcul ANISO-1A,B

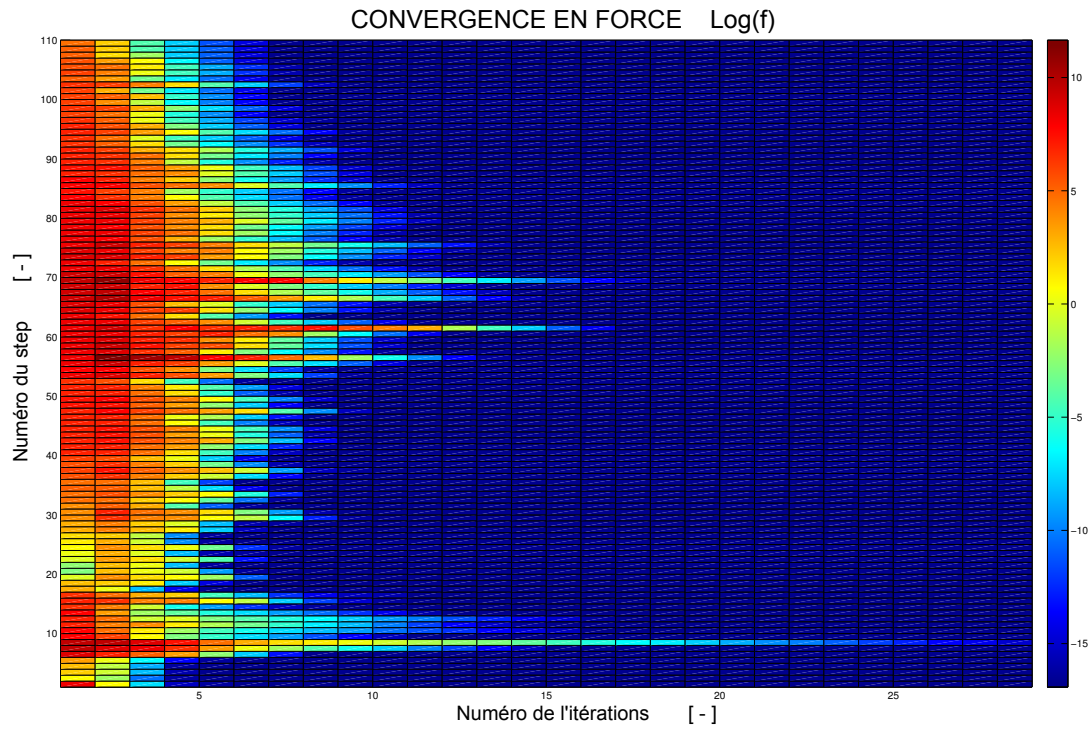


FIGURE B.27 – Convergence en force : calcul ANISO-3A,B

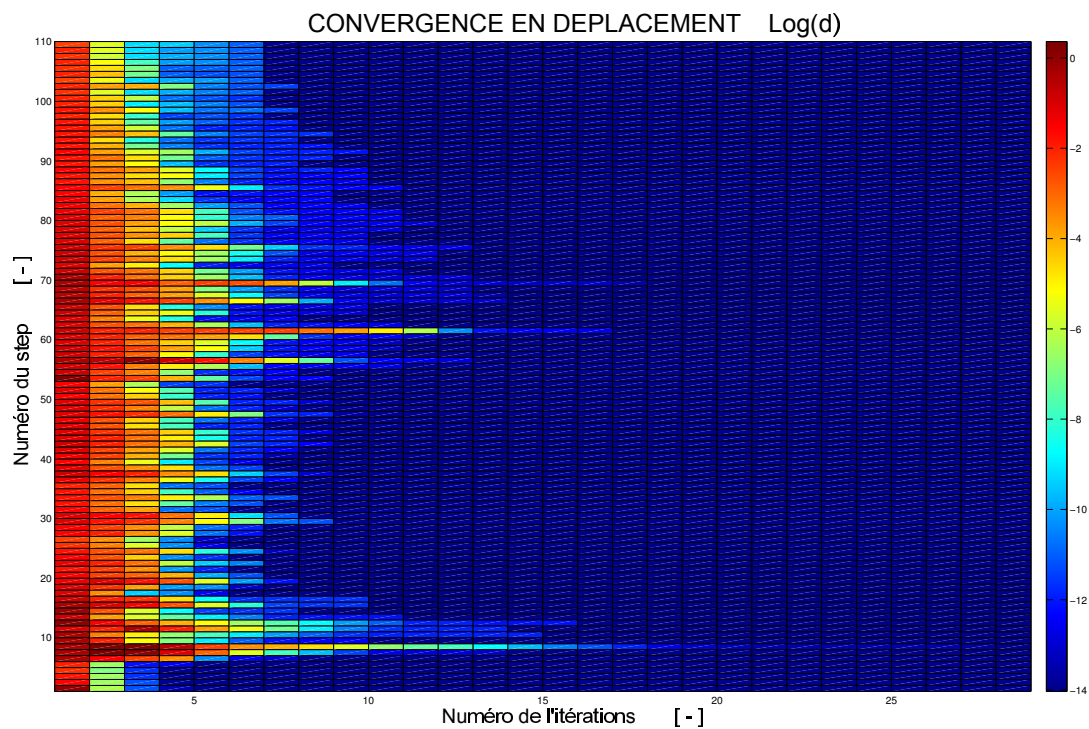


FIGURE B.28 – Convergence en déplacement : calcul ANISO-3A,B

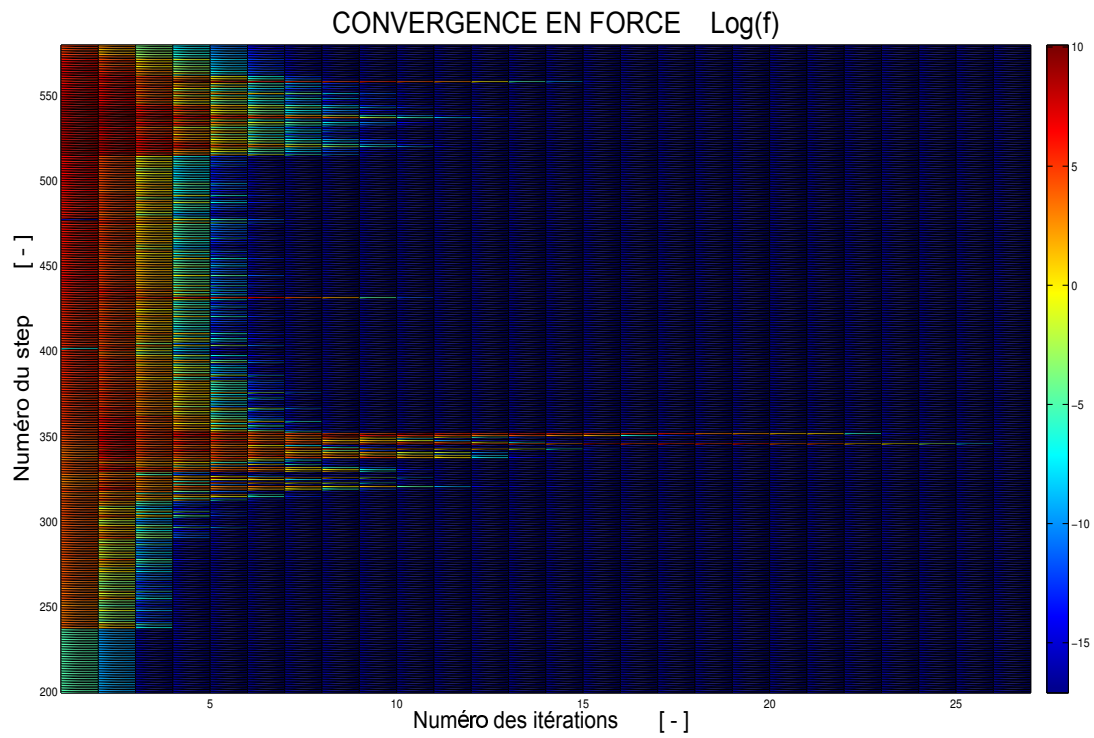


FIGURE B.29 – Convergence en force : calcul ANISO-4A,B

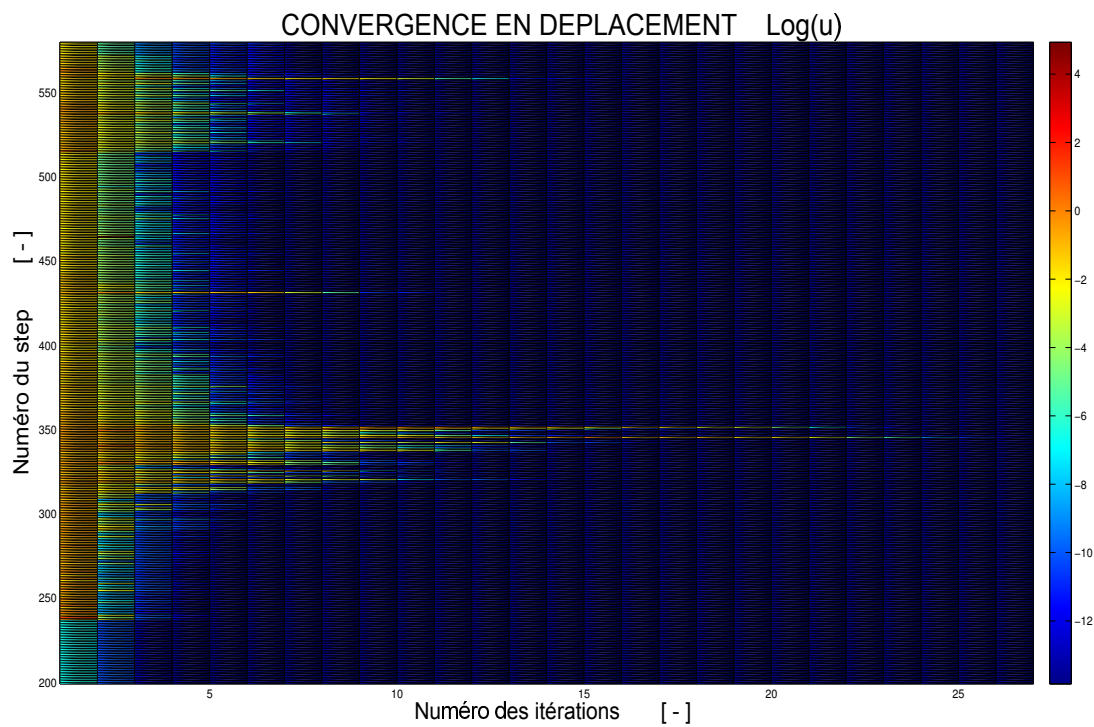


FIGURE B.30 – Convergence en déplacement : calcul ANISO-4A,B

Annexe C

Homogénéisation numérique : Les Éléments finis au carré FEM²

C.1 Lois de comportement des interfaces cohésives

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'équation 7.26 utilisée pour calculer les forces cohésives avec des fonctionnelles a-dimensionnelles est obtenue à partir des relations entre t_i, Δ_i .

Les calculs qui suivent sont faits que pour la composante tangentielle de la force t_t étant donné que les passages concernant la composante normale en cas traction sont exactement les mêmes.

Charge-Décharge élastique (CD-EL)

$$\begin{aligned} t_t &= \left[\frac{T_t^{mx}}{\Delta_t^{el}} \right] \Delta_t & \implies & t_t = \left[\frac{T_t^{mx}}{\Delta_t^{el}/\delta_t} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t \\ t_t &= \left[\frac{T_t^{mx}}{\lambda_t^{el}} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t & \implies & t_t = \Delta_t f_{tt} \end{aligned}$$

Chargement avec endommagement (C-END)

Afin de calculer la force d'interface dans un cas de chargement avec endommagement il suffirait de calculer la force t^* . Cette façon de procéder permet de calculer la fonction f_{tt} commun au cas de décharge avec endommagement.

$$\begin{aligned} t_t &= \left[\frac{t^*}{\Delta_t^{mx}} \right] \Delta_t^{mx} & \implies & t^* = \left[\frac{T_t^{mx}}{\delta_t - \Delta_t^{el}} \right] (\delta_t - \Delta_t^{mx}) \\ t_t &= \left[\frac{T_t^{mx}}{\Delta_t^{mx}} \right] \left[\frac{\delta_t - \Delta_t^{mx}}{\delta_t - \Delta_t^{el}} \right] \Delta_t^{mx} & \implies & t_t = \left[\frac{T_t^{mx}}{\Delta_t^{mx}/\delta_t} \right] \left[\frac{\delta_t - \Delta_t^{mx}}{\delta_t - \Delta_t^{el}} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t^{mx} \\ t_t &= \left[\frac{T_t^{mx}}{1 - \lambda_t^{el}} \right] \left[\frac{1 - \lambda_t^{mx}}{\lambda_t^{mx}} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t^{mx} & \implies & t_t = \left[\frac{T_t^{mx}}{\lambda_t^{el} - 1} \right] \left[1 - \frac{1}{\lambda_t^{mx}} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t^{mx} \end{aligned}$$

$$t_t = \Delta_t f_{tt} \quad (C.1)$$

Décharge élastique avec endommagement (D-END)

$$\begin{aligned} t_t &= \left[\frac{t^*}{\Delta_t^{mx}} \right] \Delta_t & \Rightarrow & t^* = \left[\frac{T_t^{mx}}{\delta_t - \Delta_t^{el}} \right] (\delta_t - \Delta_t^{mx}) \\ t_t &= \left[\frac{T_t^{mx}}{\Delta_t^{mx}} \right] \left[\frac{\delta_t - \Delta_t^{mx}}{\delta_t - \Delta_t^{el}} \right] \Delta_t & \Rightarrow & t_t = \left[\frac{T_t^{mx}}{\Delta_t^{mx}/\delta_t} \right] \left[\frac{\delta_t - \Delta_t^{mx}}{\delta_t - \Delta_t^{el}} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t \\ t_t &= \left[\frac{T_t^{mx}}{1 - \lambda_t^{el}} \right] \left[\frac{1 - \lambda_t^{mx}}{\lambda_t^{mx}} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t & \Rightarrow & t_t = \left[\frac{T_t^{mx}}{\lambda_t^{el} - 1} \right] \left[1 - \frac{1}{\lambda_t^{mx}} \right] \left[\frac{1}{\delta_t} \right] \Delta_t \\ t_t &= \Delta_t f_{tt} \end{aligned} \quad (C.2)$$

C.2 Homogénéisation de la partie mécanique

Nous proposons dans cette section une façon alternative de calculer la contrainte du mélange σ_{ij}^{mix} au lieu de celle proposé par l'équation 7.81. Pour un problème de mécanique défini sur une cellule unitaire la formulation faible de l'équilibre peut être réécrite selon l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \nabla w_{ij}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_A} \sigma_{ij} n_j^A (w_i^{A*} - w_i^{C*}) dA + \int_{\partial\Omega_B} \sigma_{ij} n_j^B (w_i^{D*} - w_i^{B*}) dA = 0 \quad (C.3)$$

$$\forall w_i^* \in C^1$$

$$\begin{aligned} w_i^* &= E_{ij} X_j \\ w_i^A - w_i^C &= E_{ij} X_j^{AC} \\ w_i^B - w_i^D &= E_{ij} X_j^{BD} \end{aligned}$$

$$-E_{ij} \int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega + E_{ij} X_j^{AC} \int_{\partial\Omega^A} \sigma_{ij} n_j^A dA + E_{ij} X_j^{BD} \int_{\partial\Omega^D} \sigma_{ij} n_j^D dA = 0 \quad (C.4)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} d\Omega = X_j^{AC} \int_{\partial\Omega^A} \sigma_{ij} n_j^A dA + X_j^{BD} \int_{\partial\Omega^D} \sigma_{ij} n_j^D dA \quad (C.5)$$

$$\int_{\Omega} \sigma d\Omega = \left[\int_{\partial\Omega^A} \sigma n dA \right] \otimes X^{AC} + \left[\int_{\partial\Omega^D} \sigma n dA \right] \otimes X^{BD} \quad (C.6)$$

Bibliographie

- [1] Aifantis E.C. *On the microstructural origin of certain inelastic models. Journal of Engineering Materials and Technology*, 106(4) :326–330, 1984.
 - [2] Aldea C., Shah S., and Karr A. *Permeability of cracked concrete. Materials and Structures*, 32 :370–376, 1999.
 - [3] Auriault J.L. *Heterogeneous medium. is an equivalent macroscopic description possible ? International Journal of Engineering Science*, 29(7) :785 – 795, 1991. ISSN 0020-7225.
 - [4] Auriault J.L. *Homogénéisation. École Doctorale Mécanique et Énergétique, INPG-UJF*, 2002.
 - [5] Auriault J.L. and Boutin C. *Deformable porous media with double porosity. quasi-statics : I coupling effects. Transport in Porous Media*, 7 :63–82, 1992.
 - [6] Auriault J.L. and Boutin C. *Deformable porous media with double porosity. quasi-statics : II memory effects. Transport in Porous Media*, 10 :153–169, 1993.
 - [7] Auriault J.L., Boutin C., and Geindreau C. *Homogenization of Coupled Phenomena in Heterogenous Media. Wiley*, 2009.
 - [8] Auriault J.L. and Sanchez-Palencia E. *Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. Journal de Mécanique*, 16 :576–603, 1977.
 - [9] Baldi G., Borsetto M., and Hueckel T. *Calibration of mathematical models for simulation of thermal, seepage and mechanical behaviour of boom clay : final report , eur 10924 en. Technical report, Luxembourg : Commission of the European Communities*, 1987.
 - [10] Baldi G., Hueckel T., Peano A., and Pellegrini R. *Developments in modelling of thermo-hydro- geomechanical behaviour of boom clay and clay-based buffer materials. Technical report, Commission of the European Communities, Nuclear Science and Technology EUR*, 1991.
 - [11] Barenblatt G.I. *The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. general ideas and hypotheses. axially-symmetric cracks. Prikl. Matem. I mekham*, 23 :434–444, 1959.
-

- [12] Barenblatt G.I. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Avances in Applied Mechanics*, 7 :55–129, 1962.
- [13] Barnichon J.D. *Finite Element Modelling in Structural and Petroleum Geology*. Ph.D. thesis, Université de Liège Faculté des Sciences Appliquées, 1998.
- [14] Bastiaens W., Bernier F., and Li X. *Multiphysics coupling and long term behaviour in rock mechanics*. In *An overview of long-term hm measurements around hades urf. EUROCK 2006*, pages 15–26. 2006.
- [15] Bastiaens W., Bernier F., and Li X. *Selfrac : Experiments and conclusions on fracturing, self-healing and self-sealing processes in clays. Physics and Chemistry of the earth*, 32 :600–615, 2007.
- [16] Bazant Z., Belytschko T., and Chang T. *Continuum theory for strain softening. Journal of Engineering Mechanics*, 110(12) :1666–1692, 1984.
- [17] Bensoussan A., Lions J.L., and Papanicolaou G. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North Holland, 1978.
- [18] Bernier F., Li X., and Bastiaens W. *Twenty-five years’ geotechnical observation and testing in the tertiary boom clay formation. Géotéchnique*, 2 :229–237, 2007.
- [19] Bernier F., Volckaert G., Alonso E., and Villar M. *Suction-controlled experiments on boom clay. Engineering Geology*, 47 :325–338, 1997.
- [20] Bilbie G. *Modélisation multi-échelle de l’endommagement et de la rupture dans les milieux (quasi-) fragiles*. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 2007.
- [21] Bilbie G., Dascalu C., Chambon R., and Caillerie D. *Micro-fracture instabilities in granular solids. Acta Geotechnica*, 3 :25–35, 2008.
- [22] Boehler M. *Applications of tensor functions in solid mechanics, Representations for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions*. Springer, Wien, 1987.
- [23] Bonet J. and Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 1997.
- [24] Borja R.I. and Wren J.R. *Micromechanics of granular media part i : Generation of overall constitutive equation for assemblies of circular disks. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1–4) :13 – 36, 1995. ISSN 0045-7825.
- [25] Boulay C., Dal Pont S., and Belin P. *Real-time evolution of electrical resistance in cracking concrete. Cement and Concrete Research*, 39 :825–831, 2009.

- [26] Brown C.B. and Evans R.J. *On the applications of couple-stress theories to granular materials.* *Géotechnique*, 22 :356–361, 1972.
- [27] Bésuelle P., Chambon R., and Collin F. *Switching deformation modes in post-localization solutions with quasi-brittle material.* *Mechanics of materials and structures*, 1(7) :1115–1134, 2006.
- [28] Bésuelle P., Desrues J., and Raynaud S. *Experimental characterisation of the localisation phenomenon inside a vosges sandstone in a triaxial cell.* *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 37(8) :1223 – 1237, 2000. ISSN 1365-1609.
- [29] Bésuelle P. and Hall S. *Characterization of strain localization in a porous rock in plane strain condition using a new true-triaxial test apparatus.* In *Advances in Bifurcation and Degradation in Geomaterials*, pages 345–352. Laboratoire 3S-R, May 2011.
- [30] Caillerie D. *Homogénéisations des matériaux à structure périodique, École d’été. Méthodes asymptotique en mécanique.* 2012.
- [31] Caillerie D., Chambon R., and Collin F. *Analytical evidence of shear band bifurcations for softening materials.* In *Advances in Bifurcation and Degradation in Geomaterials*. 2011.
- [32] Callari C. *Appunti del corso di meccanica dei mezzi porosi.* 2008.
- [33] Calvetti F., Combe G., and Lanier J. *Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material : relation between structure evolution and loading path.* *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 2 :121–163, 1997.
- [34] Camacho G.T. and Ortiz M. *Computational modelling of impact damage in brittle materials.* *International Journal of Solids and Structures*, 33(20–22) :2899 – 2938, 1996. ISSN 0020-7683. doi :10.1016/0020-7683(95)00255-3.
- [35] Casagrande A. and Carillo N. *Shear failure of anisotropic materials.* *Boston Society of Civil Engineering*, 31 :76–87, 1944.
- [36] Chadwick P., Vianello M., and Cowin S. *A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight.* *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :2471–2492, 2001.
- [37] Chambon R., Caillerie D., and El Hassan N. *One-dimensional localisation studied with a second grade model.* *European Journal of Mechanics A/Solids*, 4 :637–656, 1998.
- [38] Chambon R., Caillerie D., and Matsuchima T. *Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies.* *International Journal of Solids and Structures*, 38 :8503–8527, 2001.

- [39] Charlier R. *Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis*. Ph.D. thesis, Université de Liège, 1986-1987.
- [40] Chen G.J., Sillen X., Verstricht J., and Li X.L. *Atlas iii in situ heating test in boom clay : Field data, observation and interpretation*. *Computers and Geotechnics*, 38(5) :683–696, July 2011.
- [41] Cioranescu D. and Donato P. *An Introduction to Homogenization*. Oxford University Press, 1999.
- [42] Coll C. *Endommagement des roches argileuses et perméabilité induite au voisinage d'ouvrages souterrains*. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2005.
- [43] Coll C., Viggiani G., and Desrues J. *Fractures and self-healing within the excavated disturbed zone in clays : state of the art on fracturation and self-healing processes and characterisation*. Technical report, Laboratoire 3S-R, 2004.
- [44] Colliat-Daugas J.L. *Comportement des géomatériaux sous forte contrainte*. Ph.D. thesis, USMG-INPG, 1986.
- [45] Collin F., Chambon R., and Charlier R. *A finite element method for poro mechanical modelling of geotechnical problems using local second gradient models*. *International Journal for numerical methods in engineering*, 65 :1749–1772, 2006.
- [46] Cosserat E. and Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Ph.D. thesis, Paris, 1909.
- [47] Crampin S. *A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media*. *Wave Motion*, 3 :343–391, 1981.
- [48] Cuthill E. and McKee J. *Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices*. In *Proceedings of the 1969 24th national conference*, ACM '69, pages 157–172. ACM, New York, NY, USA, 1969.
- [49] Dal Pont S. *Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches*. Ph.D. thesis, 2011.
- [50] De Borst R. and Sluys J.L. *Localisation in a cosserat continuum under static and dynamic conditions*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90 :805–827, 1991.
- [51] Dehandschutter B., Vandycke S., Sintubin M., Vandenberghe N., Gaviglio P., Sizun J.P., and Wouters L. *Microfabric of fractured boom clay at depth : a case study of brittle-ductile transitional clay behaviour*. *Applied Clay Science*, 26 :389–401, 2004.

- [52] Desrues J. *La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires*. Ph.D. thesis, L'Université scientifique et médicale dans les matériaux granulaires, 1984.
- [53] Desrues J. *Limitations du choix de l'angle de frottement pour le critère de plasticité de drucker-prager*. *Revue Française de Génie Civil*, 6 :853–862, 2002.
- [54] Desrues J. *Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry*. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28 :279–321, 2004.
- [55] Dobrovat A. *Multi-scale modelling of damage and acoustic emission in rocks*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 2011.
- [56] Drucker D.C. and Prager W. *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*. *Quarterly of Applied Mathematics*, 10 :157–165, 1952.
- [57] Dugdale D.S. *Yielding of steel sheets containing slits*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2) :100 – 104, 1960. ISSN 0022-5096.
- [58] Duvant G. and Lions J.L. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod Paris, 1972.
- [59] El-Hassan Assoum N. *Modélisation théorique et numérique de la localisation de la déformation dans les géomatériaux*. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier -Grenoble I, 1997.
- [60] El Moustapha K. *Identification de lois de comportement enrichies pour les géomatériaux en présence d'une localisation de la déformation*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, Laboratoire 3SR, Equipe GDR, En cours.
- [61] Eringen A.C. *Nonlocal polar elastic continua*. *International Journal of Engineering Science*, 10(1) :1 – 16, 1972. ISSN 0020-7225.
- [62] Eringen A.C. *On non local plasticity*. *International Journal of Engineering Science*, 19(12) :1461–1474, 1981. ISSN 0020-7225. Dedicated to Prof. K. Kondo on the occasion of his seventieth birthday.
- [63] Fernandes R., Chavant C., and Chambon R. *A simplified second gradient model for dilatant materials : Theory and numerical implementation*. *International Journal of Solids and Structures*, 45(20) :5289 – 5307, 2008. ISSN 0020-7683.
- [64] Feyel F. *A multilevel finite element method (fe²) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(28–30) :3233 – 3244, 2003. ISSN 0045-7825.
- [65] Feyel F. and Chaboche J.L. *Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3–4) :309 – 330, 2000. ISSN 0045-7825.

- [66] Forest S. and Sievert R. *Nonlinear microstrain theories. International Journal of Solids and Structures*, 43 :7224–7245, 2006.
- [67] Fossen H., Schultz R.A., Shipton Z.K., and Mair K. *Deformation bands in sandstone : a review. Journal of the Geological Society, London*, 164 :1–15, 2007.
- [68] Frey J. *Modélisation multi-echelle de l'endommagement hydromécanique des roches argileuses*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, Institut Polytechnique de Grenoble, Laboratoire 3SR, Équipe GDR, 2010.
- [69] Frey J., Chambon R., and Dascalu C. *A two-scale poromechanical model for cohesive rocks. Acta Geotechnica*, pages 5–21, 2012.
- [70] Gemelli F. *Damage Modelling for Saturated Porous Media : a multiscale approach*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble - Università di Roma Tro Vergata, 2012.
- [71] Germain P. *La méthode des puissance virtuelles en mécanique des milieux continus : première partie : théorie du second gradient. Journal de mécanique*, 12 :235–274, 1973.
- [72] Germain P. *The method of the virtual power in continuum mechanics. part 2 : Microstructure. Journal on Applied Mathematics*, 25(3) :556–575, November 1973.
- [73] Geubelle P.H. and Baylor J.S. *Impact-induced delamination of composites : a 2d simulation. Composites Part B : Engineering*, 29(5) :589 – 602, 1998. ISSN 1359-8368.
- [74] Godinas A. and Cescotto S. *Calcul des gradient de vitesse constants au cours d'un pas - rapport interne n° 159, msm*. Technical report, Université de Liège, 1984.
- [75] Hadamard J. *Leçon sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. 1903.
- [76] Hashin Z. *Assessment of self-consistent scheme approximation : Conductivity of particulate composites. Journal of Composite Materials*, 2(3) :284–300, 1968.
- [77] Hemes S., Desbois G., Urai J.L., de Craen M., and Honty M. *Variability of the morphology of the pore space in boom clay from bib-sem, fib and mip investigations on representative samples*. Technical report, SCK-CEN, December 2011.
- [78] Hill R. *The Mathematical Theory of elasto-plasticity*. Oxford University Press, 1950.
- [79] Hill R. *Acceleration wave in solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10 :1–15, 1962.

- [80] Hill R. *A self-consistent mechanics of composite materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(4) :213 – 222, 1965. ISSN 0022-5096.
- [81] Hill R. *Aspects of invariance in solid mechanics. Advances in Applied Mechanics*, 18 :1–75, 1978.
- [82] Hillerborg A., Mod  er M., and Petersson P.E. *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. Cement and Concrete Research*, 6(6) :773 – 781, 1976. ISSN 0008-8846.
- [83] Horseman S.T., Winter M.G., and Entwistle D.C. *Geotechnical characterization of boom clay in relation to the disposal of radioactive waste (page 87). Technical report, Commission of the European Communities, EUR 10987.*, 1987.
- [84] Kotronis P., Al Holo-Al Radi S., Besuelle P., and Chamon R. *Shear softening and localisation : Modelling the evolution of the width of the zone. Acta Geotechnica*, 3 :85–97, 2008.
- [85] Kotronis P., Collin F., Bésuelle P., Chambon R., and Mazars J. *Local second gradient models and damage mechanics : 1d post-localization studies in concrete specimens. Bifurcations, Instabilities, Degradation in Geomechanics*, pages 127–142, 2007.
- [86] Kouznetsova V., Brekelmans W.A.M., and T B.F.P. *An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. Computational mechanics*, 27 :37–48, 2001.
- [87] Kouznetsova V., Geers M.G.D., and Brekelmans W.A.M. *Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(8) :1235–1260, 2002. ISSN 1097-0207. doi :10.1002/nme.541.
- [88] Kouznetsova V.G., Geers M.G.D., and Brekelmans W.A.M. *Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48–51) :5525 – 5550, 2004. ISSN 0045-7825.
- [89] Kroner E. *Statistical Modelling : Modelling Small Deformations of Polycrystals*. 1986.
- [90] Labiouse V., Sauthier C., and You S. *Hollow cylinder simulation experiments of galleries in boom clay formation. Rock Mechanics and Rock Engineering*, pages 1–13, 2013. ISSN 0723-2632.
- [91] Labiouse V., You S., Gastaldo L., Sauthier C., and Vigne L. *Deliverable d7 – laboratory simulation tests. hollow cylinder tests on boom and opalinus clays. Technical report, Rock Mechanics Laboratory (LMR), Swiss Federal Institute of Technology Lausanne (EPFL)*.

- [92] Lewis R.W. and Schrefler B.A. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. 2000.
- [93] Loret B. and Prevost J.H. *Dynamic strain localisation in elasto-visco-plastic solids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83 :247–273, 1988.
- [94] Lubliner J. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, 1990.
- [95] Mandel J. *Rhéologie et mécanique des sols*. Springer-Verlag, 1966.
- [96] Matsushima T., Chambon R., and Caillerie D. *Large strain finite element analysis of a local second gradient : application. International Journal for numerical methods in engineering*, 54 :499–521, 2002.
- [97] Mazars J. *A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. Engineering Fracture Mechanics*, 25(5–6) :729 – 737, 1986. ISSN 0013-7944.
- [98] Mazars J. and Pijaudier-Cabot G. *Continuum damage theory - application to concrete. Journal of Engineering Mechanics*, 115 :345–365, 1989.
- [99] Meier H.A., Kuhl E., and Steinmann P. *A note on the generation of periodic granular microstructures based on grain size distributions. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(5) :509–522, 2008. ISSN 1096-9853.
- [100] Meier H.A., Steinmann R., and Kuhl E. *Towards multiscale computation of confined granular media - contact forces, stresses and tangent operators -. TECHNISCHE MECHANIK*, 16 :77–88, 2008.
- [101] Mestat P. *Loi de drucker-prager. Revue Française de Génie Civil*, 1(2) :367–371, 1997.
- [102] Miehe C., Dettmar J., and Zah D. *Homogenization and two-scale simulations of granular materials for different microstructural constraints. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(8-9) :1206 – 1236, 2010. ISSN 1097-0207.
- [103] Miehe C., Schroder J., and Schotte J. *Computational homogenization analysis in finite plasticity simulation of texture development in polycrystalline materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171(3–4) :387–418, 1999. ISSN 0045-7825.
- [104] Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis*, pages 51–78, 1964.
- [105] Mindlin R.D. and Eshel N.N. *On first strain-gradient theories in linear elasticity. International Journal of Solids and Structures*, pages 109–124, 1968.

- [106] Muhlhaus E.C. and Aifantis E.C. *A variational principle for gradient plasticity. International Journal of Solids and Structures*, 28(7) :845 – 857, 1991. ISSN 0020-7683.
- [107] Muhlhaus H.B. and Vardoulakis I. *The thickness of shear bands in granular materials. Géotechnique*, 37 :271–283, 1987.
- [108] Needleman A. *A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. Journal of Applied Mechanics*, 54 :525–531, 1987.
- [109] Needleman A. *Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1) :69 – 85, 1988. ISSN 0045-7825.
- [110] Nguyen T.K. *Modélisation numérique à double échelle des matériaux granulaires cohésifs : Approche par éléments finis-éléments discrets (en cours)*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [111] Nitka M., Combe G., Dascalu C., and Desrues J. *Two-scale modeling of granular materials : a dem-fem approach. Granular Matter*, 13 :277–281, June 2011.
- [112] Oda M. *The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand. Soils Foundations*, 12 :17–36, 1972.
- [113] Oda M. *The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand. Soils Foundations*, 12 :1–18, 1972.
- [114] Ortiz M. and Simo J.C. *An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(3) :353 – 366, 1986. ISSN 1097-0207.
- [115] Pamin J.K. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. Ph.D. thesis, Delft University, 1994.
- [116] Pijaudier-Cabot G. and Bazant Z.P. *Nonlocal damage theory. Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 113 :1512–1533, 1987.
- [117] Piriyaikul K. *Anisotropic stress-strain behaviour of Belgian Boom Clay in the small strain region*. Ph.D. thesis, Ghent University, Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering (TW15), Laboratory of Geotechnics, 2006.
- [118] Podio Guidugli P. *Primer in Elasticity*. Number 58 in Journal of Elasticity. 2000.
- [119] Podio-Guidugli P. and Virga E.G. *Transversely isotropic elasticity tensors. Proceedings of the Royal Society of London. Series A.*, A-411 :85–93, 1987.
- [120] Rastiello G. *Influence de la fissuration sur la durabilité des structures en béton*. Ph.D. thesis, Université Paris Est, 2012.

- [121] Rice J. *The localisation of plastic deformation. Theoretical and Applied Mechanics*, 1976.
- [122] Romero E.M. *Characterisation and thermo-hydo-mechanical behaviour of unsaturated Boom Clay : an experimental study*. Ph.D. thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 1999.
- [123] Roscoe K.H. *The determination of strains in soils by an x-ray method. Civil Engineering Public Works Review*, 58 :873–876 and 1009–1012, 1963.
- [124] Roscoe K.H. *The influence of strain in soil mechanics. Géotechnique*, 20 :129–170, 1970.
- [125] Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer-Verlag Berlin, 1980.
- [126] Shield R. *On coulomb law of failure in soils. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 4 :10–16, 1955.
- [127] Sieffert Y., Al Holo S., and Chambon R. *Loss of uniqueness of numerical solutions of the borehole problem modelled with enhanced media. International Journal of Solids and Structures*, 46 :3173–3197, 2009.
- [128] Simo J.C. and Hughes T.J. *Computational Inelasticity*. 1998 edition, 1998.
- [129] Simo J.C. and Taylor R.L. *A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22(3) :649–670, 1986.
- [130] Sluys V.L.J. *Wave propagation, localisation and dispersion in softening solids*. Ph.D. thesis, University of Delft, 1992.
- [131] Sulem J. and Vardoulakis I. *Bifurcation analysis of the triaxial test on rock specimens. a theoretical model for shape and size effect. Acta mechanica*, 83 :195–212, 1990.
- [132] Suquet P. *Plasticité et homogénéisation, Thèse ès sciences mathématiques (mécanique théorique)*. Ph.D. thesis, Université P. et M. Curie, 1982.
- [133] Susanne H., Desbois G., and Urai J. *New insights to pore space morphologies in boom clay – results from 2d bib-sem investigations and mercury injection porosimetry*. In *EGU General Assembly 2012 - Geophysical Research Abstracts EGU2012-5631*, volume 14. 2012.
- [134] Susanne H., Guillaume D., Janos U., Mieke D.C., and Miroslav H. *2nd project report (december 2011) sck-cen external report - er 208*. Technical report, 2012.

- [135] Tamagnini C. *Theory of plasticity*. In *Academic Course - Institut für Geotechnik und Tunnelbau, Technische Universität Innsbruck (Austria)*. 2011.
- [136] Taylor D.W. *Fundamentals of soil mechanics*. 1948.
- [137] Toupin R.A. *Elastic materials with couple-stress*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, pages 385–414, 1962.
- [138] Truesdell C. *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*. Masson, 1974.
- [139] Truesdell C. and Noll W. *The non linear field theories of mechanics*. 1965.
- [140] Tsang C.F., Bernier F., and Davies C. *Geohydromechanical processes in the excavation damaged zone in crystalline rock, rock salt and indurated and plastic clays – in the context of radioactive waste disposal*. *International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences*, 42(1) :109–125, 2005.
- [141] Tvergaard V. *Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal*. *Materials Science and Engineering : A*, 125(2) :203 – 213, 1990. ISSN 0921-5093.
- [142] Tvergaard V. *Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids*. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(14) :1859 – 1868, 2003. ISSN 0013-7944.
- [143] Tvergaard V. and Hutchinson J.W. *The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids*. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6) :1377 – 1397, 1992. ISSN 0022-5096.
- [144] Van Den Eijnden B. *Méthode d'homogénéisation numérique, méthode des éléments finis aux carré (provisoire)*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [145] Vardoulakis I. *Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests*. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 4 :103–119, 1980.
- [146] Vardoulakis I. and Aifantis E.C. *A gradient flow theory of plasticity for granular materials*. *Acta Mechanica*, 87 :197–217, 1991. ISSN 0001-5970.
- [147] Vermeer P.A. and de Borst R. *Non-associated plasticity for soils, concrete and rock*. *Heron*, 29(3) :1–64, 1984.
- [148] Viggiani G. *Localizzazione delle deformazioni e fenomeni di rottura nelle argille consistenti sovraconsolidate*. Ph.D. thesis, Università di Roma "La Sapienza", 1994.

- [149] Viggiani G. and Hall S. *Full-field measurements in experimental geomechanics : historical perspective, current trends and recent results. in : Advanced experimental techniques in geomechanics.* In *ALERT Geomaterials*, pages 3–67, 2012.
- [150] Vogler M., Kolling S., and Rolfes R. *Transversely isotropic plasticity with application to fiber-reinforced plastics. LS-DYNA Anwenderforum Frankenthal*, pages 55–74, 2007.
- [151] Wang K., Jansen D., Shah S., and Karr A. *Permeability study of cracked concrete. Cement and Concrete Research*, 27(3) :381–393, 1997.
- [152] Wang X. *Modélisation numérique des problèmes avec localisation de la déformation en bandes des cisaillement.* Ph.D. thesis, Univéristé de Liège, Faculté des sciences appliquées, 1993.
- [153] Wong R.K.S. and Arthur J.R.F. *Induced and inherent anisotropy in sand. Géotechnique*, 35(4) :471 – 481, December 1985.
- [154] Wood D.M. *Soil behavior and critical state soil mechanics.* 1990.
- [155] Wren J.R. and Borja R.I. *Micromechanics of granular media part ii : Overall tangential moduli and localization model for periodic assemblies of circular disks. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 141(3–4) :221 – 246, 1997. ISSN 0045-7825.
- [156] Zaoui A. *Approximate statistical modelling and applications. In Homogenization Techniques for Composite Media*, pages 338–397, 1987.
- [157] Zervos A., Papanastasiou P., and Vardoulakis I. *A finite element displacement formulation for gradient elastoplasticity. International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6) :1369–1388, 2001.